THESES

PRESENTEES A

L'UNIVERSITE DE PROVENCE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

PAR

André CHAMBAREL

PREMIERE THESE

Contribution à l'étude de la magnétohydrostatique et de ses applications

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

SOUTENUES LE 8 JANVIER 1975 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

M.	P. CASAL	PRESIDENT
MM.	R. BOUDET R. MOREAU J.L. PEUBE C. VIVES	EXAMINATEURS

THESES

PRESENTEES A

L'UNIVERSITE DE PROVENCE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

PAR

André CHAMBAREL

PREMIERE THESE

Contribution à l'étude de la magnétohydrostatique et de ses applications

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

SOUTENUES LE 8 JANVIER 1975 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

M.	P. CASAL	PRESIDENT
MM.	R. BOUDET R. MOREAU J.L. PEUBE C. VIVES	EXAMINATEURS

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE DE PROVENCE

Président : F. BOREL

Secrétaire général : M. COURTIN

PROFESSEURS TITULAIRES

M.M.	G. BODIOU	Mathématiques appliquées
	H. BODOT	Chimie
	G. CARPENI	Chimie
	P. CASAL	Mécanique rationnelle et appliquée
	P. DESNUELLE	Chimie biologique
	C. FEHRENBACH	Astronomie
	L. FOURES	Mathématiques
	A. GIRARDIE	Zoologie
	C. GOUVERNET	Géologie appliquée
	J. HERVE	Electronique
	M. HUGON	Psycho-physiologie
	A. JULG	Chimie théorique
	M. LAFFITTE	Chimie
	D. MALE	Physique
	R. MERIGOUX	Physique industrielle

PROFESSEURS TITULAIRES A TITRE PERSONNEL

M.M.	M. BIZOUARD	Physique
	A. BLANCHARD	Mathématiques générales
Mme	C. BLANCHARD	Mathématiques
M.M.	M. BONNEAU	Mathématiques
	M. CADILHAC	Physique
	Y. DOUCET	Physique
	R. FRAISSE	Mathématiques
Mme	ML. FURNESTIN	Biologie animale

M.M.	H.	GUENOCHE	Mathématiques
	J.	MANDELBROJT	Physique
	C.	SIMON	Physiologie animale
	J.M.	SOURIAU	Méthodes mathématiques de la physique
	A.	VISCONTI	Physique théorique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M.M.	F.	BOREL	Techniques mathématiques de la physique
	R.	BOUDET	Mathématiques
Mles	F.	CATZIGRAS	Géologie historique
	R.	CHANDEBOIS	Biologie animale
M.	S.	COMBET	Chimie
Mme	S.	DELACHE	Mathématiques
M.M.	G.	FARDOUX	Mathématiques
	C.	FEUGEAS	Chimie
	M.	FOUGEREAU	Biochimie
	A.	GILLET	Mathématiques
	R.	GUERMEUR	Physique
	F.	HALBWACHS	Physique
	J.	HENNEQUIN	Electronique
	J.	MANUCEAU	Mathématiques
	H.	MERDY	Physique
Mle	M.	PICHENOT	Biologie végétale
M.M.	L.	PUJOL	Chimie
	L.	SARDA	Biochimie
Mme	M.	SIRUGUE	Physique
M.	H.	TACHOIRE	Chimie

MAITRES DE CONFERENCES

M.M.	J.P.	BELAICH	Microbiologie
	M.	BENARROCHE	Physique
	D.	BENLIAN	Chimie de coordination
	J.	BREUNEVAL	Mathématiques
	A.	CASALOT	Chimie
	J.	CRESP	Biologie animale
	M.	DELAAGE	Biochimie
	R.	DELEUIL	Physique
Mle	J.	DETRAZ	Mathématiques
M.M.	A.	LAVAGNE	Biologie végétale
	B.	MARTINET	Mathématiques
	M.	MOULINS	Biologie végétale
	J.	PANTALONI	Thermodynamique
	J.	PHILIP	Géologie historique

M.M.	R. PUJOL	Psycho-physiologie
	J.P.ROSAY	Mathématiques
	J.P.SOUBLIN	Mathématiques
	R. STREIFF	Chimie

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Magnétohydrodynamique de la Faculté des Sciences d'AVIGNON que dirige Monsieur le Professeur C. VIVES. Je tiens à lui exprimer ma très vive reconnaissance pour l'attention constante qu'il a portée à mes recherches.

Je tiens à témoigner ma gratitude envers Monsieur le Professeur P. CASAL de l'Université de Provence, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury, pour tous les conseils qu'il m'a prodigués et qui m'ont permis d'améliorer ce travail.

Mes plus vifs remerciements s'adressent à Monsieur le Professeur R. MOREAU de l'Université de GRENOBLE, Monsieur le Professeur J.L. PEUBE de l'Université de POITIERS, et Monsieur le Professeur R. BOUDET de l'Université de Provence pour l'intérêt qu'ils ont porté à cette étude ainsi que pour les suggestions judicieuses qu'ils m'ont faites.

Monsieur J. BAS, assisté de Monsieur C. BELTRAN et J.C. HOUBE, a réalisé des montages expérimentaux délicats avec beaucoup d'efficacité. Je leur exprime ma reconnaissante amitié.

J'adresse également mes sincères remerciements à Mademoiselle J. GOURRET et à Monsieur G. FONTAINE qui ont assuré, avec compétence, la dactylographie et l'impression de ce mémoire.

T A B L E D E S M A T I E R E S

INTRODUCTION GENERALE

Pages

1. Généralités..... 1

2. Notations..... 3

2.1. Symboles utilisés..... 3

2.2. Notations vectorielles et différentielles..... 4

3. Equations générales et hypothèses..... 4

3.1. Equations d'origine électromagnétique..... 4

3.2. Equations mécaniques..... 5

3.3. Equations de l'énergie..... 5

3.4. Formes adimensionnelles..... 7

PREMIERE PARTIE

ETUDE DE LA MAGNETOHYDROSTATIQUE

CHAPITRE I

Condition d'équilibre magnétohydrostatique..... 10

1. Etude théorique..... 10

1.1. Equations fondamentales..... 11

2. Recherche d'une solution générale..... 13

3. Recherche de cas particuliers importants..... 18

3.1. Induction à deux composantes constantes..... 18

3.2. (B.grad)B = 0..... 23

Pages

3.3. Densité de courant uniforme..... 25
3.4. Systèmes magnétohydrostatiques bidimensionnels..... 27
3.5. Enseignement..... 30

4. *Equilibres des systèmes magnétohydrostatiques instationnaires* 30

4.1. Equations fondamentales et problème général..... 30
4.2. Méthode de résolution..... 30
4.3. Induction à deux composantes constantes..... 32
4.4. Remarque..... 34

5. *Aspect variationnel du problème*..... 35
5.1. Travail des forces électromagnétiques..... 35
5.2. Fonction de Lagrange..... 36
5.3. Equilibre d'un système magnétohydrostatique..... 37
5.4. Expression de la fonction de Lagrange..... 37

6. *Analogie hydrodynamique de l'équilibre magnétohydrostatique.* 38

6.1. Cas d'un fluide parfait irrotationnel..... 39
6.2. Recherche d'une analogie complète..... 41
6.3. Exemples..... 44
6.4. Conclusion..... 47

7. *Etude d'un cas particulier*..... 48

7.1. Calcul de l'induction..... 49
7.2. Calcul de la pression correspondante..... 51

8. *Utilisation*..... 52

8.1. Le capteur piézoélectrique..... 52
8.2. Création d'une pression différentielle instationnaire et étalonnage d'un capteur piézoélectrique..... 56
8.3. Dispositif expérimental..... 60
8.4. Résultats expérimentaux..... 62

9. *Conclusion*..... 69

CHAPITRE II

Pages

Stabilité des équilibres magnétohydrostatiques..... 70

1. *Etude de la stabilité magnétohydrostatique des milieux incompressibles*..... 70

1.1. Cas des équilibres stationnaires..... 70

1.2. Equilibres instationnaires..... 105

2. *Etude de la stabilité magnétohydrostatique des milieux compressibles*..... 110

2.1. Mise en équation..... 110

2.2. Méthode de résolution..... 111

3. *Conditions nécessaires et suffisante à la réalisation d'un équilibre magnétohydrostatique*..... 113

4. *Etude des systèmes déséauilibrés*..... 117

4.1. Généralités..... 117

4.2. Systèmes quasi-équilibrés..... 117

5. *Conclusion*..... 121

DEUXIEME PARTIE

APPLICATION A LA MAGNETOACOUSTIQUE

CHAPITRE I

Le résonateur d'Helmoltz magnétohydrodynamique..... 123

1. *Etude théorique*..... 123

1.1. Equilibre du système..... 123

1.2. Perturbation du milieu..... 124

1.3. Résolution..... 126

Pages

2. Amélioration des performances..... 130

3. Etude expérimentale..... 133

3.1. Théorie du résonateur d'Helmoltz..... 133

3.2. Le résonateur d'Helmoltz magnétohydrodynamique..... 137

3.3. Description des dispositifs expérimentaux..... 140

3.4. Etude expérimentale..... 144

3.5. Conclusion..... 152

4. Utilisation comme générateur de vibration..... 153

4.1. Théorie.....

4.2. Description des dispositifs expérimentaux..... 161

4.3. Résultats expérimentaux..... 162

4.4. Schéma électrique équivalent..... 166

5. Conclusion..... 168

CHAPITRE II

Développement de résonances magnétoacoustiques par application d'un champ magnétique..... 170

1. Introduction..... 170

1.1. Généralités..... 170

1.2. Système utilisé..... 170

2. Cas du fluide incompressible..... 172

2.1. Mise en équation..... 172

2.2. Les conditions aux limites..... 173

2.3. Résolution des équations d'équilibre..... 173

3. Cas du fluide compressible..... 175

3.1. Mise en équation..... 175

3.2. Méthode de résolution..... 176

4. Exploitation numérique..... 182

4.1. Etude du champ des vitesses..... 182

4.2. Etude du champ d'induction magnétique..... 185

5. *Le résonateur à mercure*..... 191

5.1. Aspect théorique du problème..... 191
5.2. Exploitation numérique..... 193
5.3. Etude expérimentale..... 200

6. *Conclusion*..... 211

BIBLIOGRAPHIE..... 213

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

INTRODUCTION GENERALE

1. GENERALITES

Les premières études en magnétohydrodynamique ont consisté le plus souvent d'une part à généraliser des problèmes de mécanique des fluides classique, où le milieu fluide en mouvement est immergé dans un champ d'induction magnétique, d'autre part à élaborer des théories permettant d'expliquer des phénomènes relevant de l'astrophysique et de la géophysique.

Une partie de ces travaux a donné lieu à un certain nombre d'applications pratiques : pompes et débitmètres électromagnétiques, métallurgie, refroidissement des piles dans les centrales nucléaires, tentative de production d'énergie électrique.

Au cours des dernières années, des chercheurs se sont particulièrement intéressés aux phénomènes d'instabilité et de turbulence en magnétohydrodynamique [1], [2], [3] et ont obtenu des résultats théoriques intéressants mais les renseignements d'origine expérimentale sont encore peu nombreux dans ce domaine.

Les études entreprises dans ce travail sont spécifiques à la magnétohydrodynamique, la plupart des problèmes envisagés se ramènent à l'hydrostatique par la suppression du champ de force électromagnétique imposé.

L'étude théorique des équilibres magnétohydrostatiques est abordée dans une première partie en recherchant les conditions générales d'équilibres d'un fluide électroconducteur, globalement neutre , en présence d'un champ de force électromagnétique. La stabilité du milieu est étudiée à l'aide de la méthode des petites perturbations d'après le modèle de S. CHANDRASEKHAR [4] et il apparait conformément aux hypothèses de H. ALFVEN [5] un phénomène ondulatoire qui représente la partie transitoire d'un mouvement hydrodynamique plus général. Les résultats théoriques obtenus entrainent des applica-

tions pratiques, méthode nouvelle d'étalonnage de capteurs de pression piézoélectriques par exemple.

Les perturbations infinitésimales d'équilibres magnétohydrostatiques particuliers peuvent dans certaines conditions faire apparaître des résonances électromécaniques ou magnétoacoustiques du milieu.

Ces résultats sont exploités en réalisant d'abord un générateur de vibrations à constantes localisées : le résonateur d'Helmoltz magnétohydrodynamique où la masse fluide vibrante est soumise à une excitation d'origine électromagnétique.

Les propriétés d'un champ d'induction particulier comprenant une composante fluctuante et une composante continue sont ensuite utilisées pour concevoir un émetteur de vibrations à constantes réparties. La production de courants par induction entraîne l'apparition de forces de Laplace au sein même du fluide et pour des fréquences d'excitation convenablement choisies, des résonances magnétoacoustiques prennent naissance. Ce système est intéressant car il est susceptible de supprimer des difficultés d'ordre technologique, son fonctionnement se produisant sans électrode et ne nécessitant pas la présence de parois matérielles.

2. NOTATIONS

2.1. Symboles utilisés

Sous réserve de modifications indiquées au cours du texte, les principales notations utilisées sont les suivantes :

ρ	: masse volumique du fluide.
μ	: perméabilité magnétique.
ν	: viscosité cinématique du fluide.
η	: viscosité dynamique du fluide.
σ	: conductivité du fluide.
u	: vitesse locale.
U	: vitesse moyenne.
c	:célérité du son dans le fluide.
ω, Ω	: pulsation.
P	: pression.
ϕ	: potentiel des vitesses.
B, b	: inductions magnétiques.
E	: champ électrique.
ε_0	: constante diélectrique.
ρ_e	: densité volumique de charge.
a	: dimension caractéristique.
$u_0 = B_0/\sqrt{\mu.\rho}$	: vitesse des ondes de Alfven.
$0\, x_1\, x_2\, x_3$	: trièdre direct de référence.
$R_e = u_0.a/\nu$	: nombre de Reynolds hydrodynamique.
$R_m = \sigma.\mu.a.u_0$	: nombre de Reynolds magnétique.
$M = B_0.a.(\sigma/\eta)^{1/2}$	: nombre de Hartmann.

2.2. Notations vectorielles et différentielles

Nous utiliserons en général les conventions de sommation d'Einstein en désignant par i l'indice vectoriel et par j l'indice de sommation.

Vecteur $\vec{V}$: V_i

$\mathrm{div}\,\vec{V}$: $\dfrac{\partial V_j}{\partial x_j}$

$\Delta\vec{V}$: $\dfrac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2}$

$\vec{Rot}\,\vec{V}$: $\varepsilon_{ijk}\cdot\dfrac{\partial V_k}{\partial x_j}$

$\vec{Rot}\,(\vec{v}\wedge\vec{B})$: $\varepsilon_{ijk}\cdot\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\varepsilon_{kmn}V_m\cdot B_n\right)$

avec $\varepsilon_{ijk} =$ { 1 si les indices se suivent. ; -1 si les indices sont inversés. ; 0 si 2 indices sont identiques. }

3. EQUATIONS GENERALES ET HYPOTHESES

3.1. Equations d'origine électromagnétique

Loi d'Ohm.

$$j_i = \sigma\left(E_i + \varepsilon_{kmn}V_m\cdot B_n\right)$$

Equations de Maxwell

$$\varepsilon_{ijk}\cdot\frac{\partial B_k}{\partial x_j} = \mu\cdot J_i \qquad \frac{\partial J_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\varepsilon_{ijk}\cdot\frac{\partial E_k}{\partial x_j} = -\frac{\partial B_i}{\partial t} \qquad \frac{\partial B_j}{\partial x_j} = 0$$

Le fluide est supposé homogène et isotrope vis à vis des constantes ε, μ, σ, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial \mu}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} = 0$$

Les effets relativistes sont négligés.

3.2. Equations mécaniques

Conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \cdot \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \eta \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + (\eta + \eta') \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) + \varepsilon_{ijk} \cdot J_j \cdot B_k$$

Conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_j = 0$$

Dans le cas d'un fluide incompressible l'équation de conservation de la masse se réduit à

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

3.3. Equations de l'énergie

3.3.1. Energie mécanique

$$\rho \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{u_j^2}{2}\right) = -u_j \cdot \frac{\partial P}{\partial x_j} + \rho \cdot u_j \cdot g_j + \eta \cdot u_j \cdot \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} + u_j \cdot \varepsilon_{ijk} \cdot J_j \cdot B_k$$

$\rho \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{u_j^2}{2}\right)$: variation d'énergie cinétique par unité de temps.

$u_j \cdot \frac{\partial P}{\partial x_j}$: densité de puissance des forces de pression

$\rho \cdot u_j \cdot g_j$: densité de puissance des forces de gravité.

$\eta \cdot u_j \cdot \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2}$: densité de puissance des forces de viscosité.

$u_j \cdot \varepsilon_{ijk} \cdot J_j \cdot B_k$: densité de puissance des forces électromagnétiques.

Il est intéressant d'expliciter le terme électromagnétique

$$u_j \cdot \varepsilon_{ijk} \cdot J_j \cdot B_k = J_j \left(\varepsilon_{ijk} \cdot u_j \cdot B_k \right) = - J_j \left(\frac{J_j}{\sigma} - E_j \right)$$

$$= J_j \cdot E_j - \frac{J_j^2}{\sigma}$$

où $\frac{J_j^2}{\sigma}$ représente l'effet Joule.

3.3.2. Energie magnétique

Les équations

$$\varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial E_k}{\partial x_j} = - \frac{\partial B_i}{\partial t} \qquad \frac{\partial B_j}{\partial x_j} = 0$$

$$J_i = \sigma \left(E_i + \varepsilon_{ijk} \cdot u_j \cdot B_k \right)$$

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial B_k}{\partial x_j} = \mu_0 \cdot J_i$$

donnent

$$\frac{dB_i}{dt} - \frac{1}{\sigma \mu} \cdot \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j^2} = B_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

En multipliant scalairement par B_i, il vient

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{B_j^2}{2\mu} \right) = \frac{1}{\sigma \mu} \cdot \frac{B_j}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 B_j}{\partial x_j^2} + \frac{B_j}{\mu} \cdot \left(B_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

$$= \frac{1}{\sigma \mu^2} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varepsilon_{ijk} \cdot B_j \cdot \varepsilon_{kmn} \frac{\partial B_m}{\partial x_m} \right) - \left(\varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial B_k}{\partial x_j} \right)^2 \right] + \frac{B_j}{\mu} \cdot \left(B_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{B_j^2}{2\mu} \right)$: variation de l'énergie magnétique par unité de temps.

$\frac{J_j^2}{\sigma}$: densité de puissance dissipée par effet Joule.

$B_j \cdot \left(B_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$: densité de puissance correspondant au mouvement du fluide.

3.3.3. Energie électrostatique : $\varepsilon_0 . E_j^2$

Ce terme correspond à une correction relativiste qui sera toujours négligée dans nos expériences.

3.4. Formes adimensionnelles

Les équations générales sont

$$\rho \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \rho \cdot u'_j \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} = - \frac{\partial P'}{\partial x'_i} + \eta \cdot \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x'^2_j} + \frac{1}{\mu} \cdot \varepsilon_{ijk} \cdot \varepsilon_{kmn} \cdot B'_j \cdot \frac{\partial B'_n}{\partial x'_m}$$

$$\frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial B'_i}{\partial t'} - \frac{1}{\sigma . \mu} \cdot \frac{\partial^2 B'_i}{\partial x'^2_j} = \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\varepsilon_{kmn} \cdot u'_m \cdot B'_n \right)$$

A partir de grandeurs de références, soit

a	: Longueur
B_0	: champ d'induction
u_0	: vitesse

Nous pouvons définir les grandeurs adimensionnelles

$$u = \frac{u'}{u_0} \qquad P = \frac{P'}{\rho . u_0^2} \qquad \omega = \omega' . \frac{a}{u_0}$$

$$B = \frac{B'}{B_0} \qquad t = t' . \frac{u_0}{a} \qquad M = B_0 . a . \left(\frac{\sigma}{\eta} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$R_e = \frac{a . u_0}{\nu} \qquad R_M = \sigma . \mu . a . u_0$$

En reportant dans les équations électromécaniques on obtient

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{R_e} \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{M^2}{R_e . R_M} \cdot \varepsilon_{kmn} \cdot \varepsilon_{ijk} \cdot B_j \cdot \frac{\partial B_n}{\partial x_m}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} - \frac{1}{R_M} \cdot \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j^2} = \varepsilon_{ijk} \cdot \varepsilon_{kmn} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (u_m \cdot B_n)$$

Si la vitesse de référence est celle des ondes magnétohydrodynamiques,

$$u_0 = \frac{B_0}{\sqrt{\mu \cdot \rho}} \qquad \text{entraîne} \qquad \frac{M^2}{Re \cdot R_M} = 1$$

Nous adopterons généralement une telle représentation.

PREMIERE PARTIE :

ETUDE DE LA MAGNETOHYDROSTATIQUE

CHAPITRE I

CONDITION D'EQUILIBRE MAGNETOHYDROSTATIQUE

1. ETUDE THEORIQUE

Beaucoup de problèmes cosmiques tels que par exemple les taches solaires s'expliquent à partir des théories de la magnétohydrostatique. Il faut ainsi envisager des états d'équilibre dans lesquels les forces mécaniques classiques sont compensées par les forces électromagnétiques. On peut citer le confinement de plasmas entre des parois non matérielles comme application de laboratoire.

L'équation générale de l'hydrostatique est

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = F_i$$

L'équilibre ne peut exister que si F_i dérive d'un potentiel, ce qui est d'ailleurs le cas en hydrostatique : $F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$

On peut alors écrire

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(P + U) = 0$$

F_i est dans la plupart des cas une force de pesanteur donc

$$U = \rho \cdot g \cdot z$$

Le problème de la stabilité mis à part, la question de l'équilibre ne se pose pas car il peut toujours exister une pression qui compense le potentiel scalaire U.

Il en est de même en magnétohydrostatique.

L'équation s'écrit alors

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \varepsilon_{ijk} \cdot J_j \cdot B_k$$

où P inclut les termes autres que les termes électromagnétiques.

A priori, $\varepsilon_{ijk} \cdot J_j \cdot B_k$ ne dérive pas d'un potentiel scalaire, il faut donc rechercher à quelle condition l'équation précédente existe. C'est l'ensemble de ces problèmes que nous nous proposons d'aborder.

1.1. Equations fondamentales et problème général dans le cas de phénomènes stationnaires

1.1.1. Equation indéfinie de l'équilibre [8]

Soit un système hydrostatique ($\frac{\partial P}{\partial x_i} = 0$) que nous supposerons stable par hypothèse. Le terme de pression P, contient tous les potentiels scalaires des forces extérieures appliquées, sauf celui des forces électromagnétiques. P peut comprendre en particulier la pression hydrostatique. On peut alors écrire

$$(1) \qquad \frac{\partial P}{\partial x_i} = \varepsilon_{ijk} \cdot J_j \cdot B_k$$

Le système étant statique, la densité de courant J_i ne peut être que d'origine extérieure. D'autre part, $B_i = B_{ii} + B_{\varepsilon i}$

B_{ii} est l'induction induite par J_i .

$B_{\varepsilon i}$ l'induction d'origine extérieure appliquée au système.

1.1.2. Introduction du théorème d'Ampère

$$(2) \qquad J_i = \frac{1}{\mu} \cdot \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial B_k}{\partial x_j}$$

$$(3) \qquad \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial B_{\varepsilon k}}{\partial x_j} = 0$$

On peut aussi écrire

$$\varepsilon_{ijk} \cdot J_j \cdot B_k = \frac{1}{\mu} \cdot B_j \cdot \frac{\partial B_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{B_j^2}{2\mu} \right)$$

L'équation (1) s'écrit alors

$$(4) \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} \left(P + \frac{B_j^2}{2\mu} \right) = \frac{1}{\mu} \cdot B_j \cdot \frac{\partial B_i}{\partial x_j}$$

1.1.3. Equations annexes

Les équations de continuité de l'induction s'écrivent

$$(5) \qquad \frac{\partial B_j}{\partial x_j} = 0$$

Il faut encore ajouter l'équation de transport magnétique qui se réduit ici à

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j^2} = 0$$

1.1.4. Condition d'équilibre

L'équation (4) entraîne que

$$(7) \qquad \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varepsilon_{kmn} \cdot J_m \cdot B_n \right) = \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left(B_j \cdot \frac{\partial B_k}{\partial x_j} \right) = 0$$

La condition nécessaire pour que P existe est que les forces de Laplace dérivent d'un potentiel scalaire.

Ces équations sont la condition d'équilibre du système. Elles montrent que n'importe quelle configuration d'induction magnétique ne peut pas convenir, d'autant plus qu'il faut ajouter à la condition (7) les équations (5) et (6).

Les relations (5), (6) et (7) font apparaître un excédent d'équations pour déterminer l'induction B_i à utiliser.

Si une configuration en équilibre statique subit une perturbation arbitraire, $\vec{Rot}\,(\vec{J}\wedge\vec{B})$ ou $\vec{Rot}\,[(\vec{B}.\vec{grad})\vec{B}]$ ne sera plus nul ; on change la configuration des lignes de champ et on introduit une rotationnalité qui n'existait pas dans la configuration en équilibre. Il y a alors 2 cas :

- La rotationnalité tend à rétablir l'équilibre, il y a alors stabilité.
- La rotationnalité tend à accentuer la perturbation, il y a instabilité.

Toute déformation des lignes de champ induit une force qui ne peut pas être compensée par un profil de pression dans le fluide car

$$\varepsilon_{ijk}.\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial P}{\partial x_k}\right)\equiv 0 \qquad \text{quel que soit P.}$$

Dans le cas du déséquilibre, il n'existe pas de solution de l'équation (4) d'une part et par ailleurs il se produit, dans la masse du fluide des instabilités.

2. RECHERCHE D'UNE SOLUTION GENERALE [16]

Il faut d'abord résoudre l'équation (7) $\varepsilon_{ijk}.\frac{\partial}{\partial x_j}\left(B_j.\frac{\partial B_k}{\partial x_j}\right)=0$ ce qui revient à rechercher un potentiel scalaire pour le vecteur $B_j.\frac{\partial B_i}{\partial x_j}$ c'est donc une intégrale première. Cette seconde méthode a l'avantage d'abaisser d'une unité l'ordre du système différentiel suivant

$$(8)\qquad B_j.\frac{\partial B_i}{\partial x_j}=\mu.\frac{\partial \Psi}{\partial x_i}=f_i$$

On recherche la solution $B_i(x_i)$ sous forme implicite, soit

$$(9)\qquad \phi_i\,(x_i, B_i)=C_i$$

L'induction $B_i(x_i)$ est donnée comme solution de l'équation (9) où ϕ_i est un champ vectoriel dépendant de x_i et B_i .

Nous pourrons expliciter les solutions que si le déterminant fonctionnel Δ_o n'est pas nul, avec

$$\Delta_o=\Delta_{mn}=\left[\frac{\partial \phi_m}{\partial B_n}\right]$$

Cette condition étant supposée réalisée, on peut écrire que la différentielle totale, par rapport à l'espace, des fonctions est nulle

$$\frac{d\phi_i}{dx_i} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi_i}{\partial B_j} \cdot \frac{\partial B_j}{\partial x_i}$$

En multipliant par B_j et en sommant sur j, il en résulte

$$B_j \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi_i}{\partial B_j} \cdot B_j \cdot \frac{\partial B_i}{\partial x_j} = 0$$

En tenant compte du système différentiel (8), il vient

$$B_j \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi_i}{\partial B_j} \cdot f_j = 0 \qquad (10)$$

Le système différentiel à 3 inconnues B_i fonction de 3 variables x_i se réduit à une équation différentielle linéaire à une inconnue fonction de 6 variables (x_i, B_i). On remarque que quel que soit i, c'est-à-dire ϕ_i défini par la relation (9), l'équation (10) est inchangée, c'est pourquoi le système précédent (8) se ramène à une seule équation (10), et réciproquement.

Pour résoudre l'équation (10), on utilise la méthode des caractéristiques. Leurs équations vérifient le système différentiel suivant

$$\frac{dx_i}{B_i} = ds \qquad \text{et} \qquad \frac{d\phi_i}{ds} = 0$$

$$\frac{dB_i}{f_i} = ds \qquad (11)$$

s étant un paramètre quelconque.

On a donc une variété de dimension 6 en représentation paramétrique.

Considérons une condition initiale quelconque

$$x_i = x_i(\alpha_{2i-1})$$

$$B_i = B_i(\alpha_{2i-1})$$

$$\phi_i = C_i$$

α_{2i-1} étant le paramètre définissant la variété initiale.

La solution est

$$x_i = x_i(s, \alpha_{2i-1})$$

$$B_i = B_i(s, \alpha_{2i-1})$$

$$\Phi_i = C_i \qquad (C_i \text{ constante})$$

Pour éliminer les paramètres s et α_{2i-1}, on calcule le déterminant fonctionnel du système

$$\Delta = \frac{D(x_i, B_i)}{D(s, \alpha_{2i-1})} = \left[\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_k}, \frac{\partial B_\ell}{\partial \alpha_\ell}\right]$$

Si $\Delta \neq 0$ pour $s = 0$, la solution est unique.

Si $\Delta = 0$ pour $s = 0$, plusieurs cas se présentent.

Soit le vecteur caractéristique

$$V_i = (x_i, B_i, 0)$$

Une surface caractéristique est tangente au vecteur caractéristique attaché à ce point. Le déterminant a donc 2 lignes (ou 2 colonnes) proportionnelles, c'est-à-dire

$$(B_i, f_i) = \lambda_j \cdot \frac{\partial(x_i, B_i)}{\partial \alpha_k}$$

Donc, si $\Delta = 0$ partout sur la variété initiale, pour que des solutions existent il faut que la variété initiale soit une variété caractéristique, il y a dans ce cas une infinité de solutions.

Cette discussion générale permet de transformer le système différentiel initial (8) en un système aux différentielles totales

$$\frac{dx_i}{B_i} = ds$$

(11) avec $f_i = \mu \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}$

$$\frac{dB_i}{f_i} = ds$$

On établit à partir de ce système une relation entre B_i et x_i, solution du problème cherché.

On remarque que le système différentiel (11) s'écrit sous une forme vectorielle bien caractéristique

$$\vec{B} \wedge \vec{dl} = 0$$

(11')

$$\overrightarrow{grad}\,\Psi \wedge d\vec{B} = 0$$

la fonction $\Psi(x_i)$ étant quelconque.

Ces équations montrent que les traces de la variété caractéristique de l'équation (10) dans l'espace (x_i), sont les lignes du champ d'induction.

Parmi l'ensemble des fonctions solution $B_i(x_i)$ de (11), il faut chercher un sous-ensemble, qui vérifie en plus du système (11), les équations

(5) $$\frac{\partial B_i}{\partial x_j} = 0$$

(6) $$\frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j^2} = 0$$

En supposant les relations (5) et (6) satisfaites, l'équation de la magnétohydrostatique devient

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(P + \frac{B_j^2}{2\mu}\right) = \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}$$

c'est-à-dire

$$P + \frac{B_i^2}{2\mu} = \Psi(x_i) - \Psi(0)$$

Pour utiliser cette méthode, il faut fixer la pression totale $P + B_j^2/2\mu$ à obtenir, ensuite, à partir du potentiel scalaire des forces de Laplace $\Psi(x_i)$, on en déduit l'induction et la densité de courant à appliquer au système magnétohydrostatique.

Pour ne pas revenir au cas trivial de l'équilibre hydrostatique $\partial P/\partial x_i = 0$, il faut vérifier de plus que l'induction B_i obtenue n'est pas irrotationnelle (dans cette hypothèse les densités de courant seraient nulles).

L'étude précédente reste cependant très générale, mais elle permet de montrer certaines propriétés de la condition d'équilibre des systèmes magnéto-hydrostatiques.

ETUDE D'UN CAS PARTICULIER RELEVANT DE LA METHODE GENERALE

Afin d'illustrer cette méthode, recherchons le vecteur induction qui établit une pression totale du type

$$P + \frac{B_i^2}{2\mu} = V_{oj} \cdot x_j \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(P + \frac{B_i^2}{2\mu}\right) = V_{oi}$$

V_{oi} étant un vecteur constant.

Nous sommes ramenés au système suivant

$$\frac{dB_i}{V_{oi}} = ds$$

(11')

$$\frac{dx_i}{B_i} = ds$$

Soit la variété initiale en coordonnées paramétriques

$$x_{oi} = X_i(\alpha_k)$$

$$B_{oi} = Y_i(\alpha_k)$$

k étant un nombre entier variant de 1 à 5.

Il faut en déduire

$$x_i = x_i(s, \alpha_k)$$

$$B_i = B_i(s, \alpha_k)$$

ce qui représente les relations $B_i = B_i(x_i)$ en coordonnées paramétriques.

En intégrant le système (11'), il vient

$$B_i = V_{oi} \cdot s + Y_i(\alpha_k)$$

$$x_i = V_{oi} \cdot \frac{s^2}{2} + Y_i(\alpha_k) \cdot s + X_i(\alpha_k)$$

Le déterminant fonctionnel de ce paramétrage est donné par

$$\Delta = \begin{bmatrix} V_{o1}.\delta + Y_1 & V_{o2}.\delta + Y_2 & \dots \\ \delta.\frac{\partial Y_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial X_1}{\partial \alpha_1} & \dots & \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

En supposant que Δ soit différent de O, on peut donc calculer

$$\delta = \delta\,(B_i, x_i)$$

ou $B_i = B_i\,(x_i)$

$$\alpha_k = \alpha_k\,(B_i, x_i)$$

Ce cas pourtant simple, montre qu'il sera difficile en général d'expliciter les $B_i\,(x_i)$, en outre, il faudra parmi ces solutions, chercher celles qui vérifient les équations (5) et (6).

Cet exemple qui illustre la théorie précédente montre que pour une pression totale imposée, la résolution complète du problème est fonction de la variété initiale donnée, en particulier dans la vérification des relations (5) et (6) qui déterminent 4 équations dépendant des 6 fonctions initiales $X_i(\alpha_k)$ et $Y_i(\alpha_k)$. Il y a une restriction de l'ensemble des solutions due aux équations complémentaires (5) et (6).

3. RECHERCHE DE CAS PARTICULIERS IMPORTANTS

Nous étudierons dans ce paragraphe des solutions de l'équation d'équilibre qui ne font pas appel à la méthode précédente dans sa généralité, dans le but de mettre en évidence des cas simples.

On recherchera ici des formes particulières du champ d'induction et des densités de courant satisfaisant les conditions d'équilibre.

3.1. - Cas d'une induction à 2 composantes constantes

B_{o2} et B_{o3} étant les composantes constantes, soit $B_i = [B_1, B_{o2}, B_{o3}]$

Les équations (11) montrent que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} = 0$$

Le système (8) se réduit donc à

$$B_1 \cdot \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + B_{02} \cdot \frac{\partial B_1}{\partial x_2} + B_{03} \cdot \frac{\partial B_1}{\partial x_3} = \mu \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}$$

L'équation de continuité (5) devient $\frac{\partial B_1}{\partial x_1} = 0$

et en reportant dans l'équation précédente, on obtient

$$B_1 = B_1 (x_2, x_3)$$

$$B_{02} \cdot \frac{\partial B_1}{\partial x_2} + B_{03} \cdot \frac{\partial B_1}{\partial x_3} = \mu \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}$$

Il en résulte

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} (x_2, x_3)$$

On peut ainsi avoir la forme de la fonction Ψ

$$\Psi = \frac{V_0}{\mu} \cdot (x_1 - x_0)$$

L'équation à résoudre est alors

$$B_{02} \cdot \frac{\partial B_1}{\partial x_2} + B_{03} \cdot \frac{\partial B_1}{\partial x_3} = V_0$$

La condition d'équilibre est bien vérifiée car $\varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial V_{0k}}{\partial x_j} = 0$. On peut choisir un système d'axes cartésien tel que le vecteur V_{0i} soit dans la direction x_i, avec les symboles de sommation d'Einstein, on peut écrire

$$B_j \cdot \frac{\partial B_k}{\partial x_j} = V_0 \cdot \delta_{ik} \qquad \text{avec } \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \neq i \\ 1 & \text{pour } k = i \end{cases}$$

Pour toute direction différente de x_i , l'induction est uniforme.

$$B_i = \begin{bmatrix} B_1 (x_2, x_3) \\ B_{02} \\ B_{03} \end{bmatrix}$$

Le système (8) se réduit à

$$B_{02} \cdot \frac{\partial B_1}{\partial x_2} + B_{03} \cdot \frac{\partial B_1}{\partial x_3} = V_0 \qquad \text{avec} \quad (B_{02}, B_{03}, V_0) \neq 0$$

C'est une équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre à coefficients constants ; on peut la remplacer par le système différentiel suivant

$$\frac{dx_2}{B_{02}} = ds$$

$$\frac{dx_3}{B_{03}} = ds$$

$$\frac{dB_1}{V_0} = ds$$

Les variétés caractéristiques, ici des surfaces caractéristiques, sont des cylindres parallèles à la droite définie par

$$x_3 = \frac{B_{03}}{V_0} \cdot B_1$$

$$x_2 = \frac{B_{02}}{V_0} \cdot B_1$$

Cette droite a pour pente B_{03}/B_{02} dans le plan (x_2, x_3) ; elle correspond aux projections des lignes de force du champ d'induction sur le plan (x_2, x_3). La solution du système est alors

$$V_0 \cdot x_2 - B_1 \cdot B_{02} = C_2$$

(c : constante)

$$V_0 \cdot x_3 - B_1 \cdot B_{03} = C_3$$

Une combinaison linéaire des relations précédentes permet d'écrire

$$V_0 \left(B_{03} \cdot x_2 - B_{02} \cdot x_3 \right) = C'_2$$

$$V_0 \cdot x_3 - B_1 \cdot B_{03} = C_3$$

La solution générale est donc

$$\phi \left[V_0 \left(B_{03} \cdot x_2 - B_{02} \cdot x_3 \right), \left(V_0 \cdot x_3 - B_1 \cdot B_{03} \right) \right] = 0$$

ϕ étant une fonction arbitraire.

La solution générale peut encore s'écrire sous la forme

$$V_0 . x_3 - B_1 . B_{03} = \varphi' \left[V_0 . (B_{03} . x_2 - B_{02} . x_3) \right]$$

Donc

$$B_1 = \frac{V_0}{B_{03}} . x_3 + \varphi \left[V_0 . (B_{03} . x_2 - B_{02} . x_3) \right]$$

φ est encore une fonction arbitraire qui dépend des conditions initiales.

L'équation de continuité du vecteur induction est vérifiée pour toute fonction $\varphi(x_2, x_3)$.

De plus, il faut rechercher parmi les fonctions φ celles qui donnent pour $B_1(x_2, x_3)$ une fonction harmonique ; il faut exprimer que $B_1(x_2, x_3)$ satisfait à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 B_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 B_1}{\partial x_3^2} = 0$$

Posons

$$\gamma = V_0 . (B_{03} . x_2 - B_{02} . x_3)$$

$$\frac{\partial^2 B_1}{\partial x_2^2} = (V_0 . B_{03})^2 . \frac{d^2 \varphi}{d \gamma^2}$$

$$\frac{\partial^2 B_1}{\partial x_3^2} = (V_0 . B_{02})^2 . \frac{d^2 \varphi}{d \gamma^2}$$

C'est-à-dire

$$V_0^2 . (B_{02}^2 + B_{03}^2) . \frac{d^2 \varphi}{d \gamma^2} = 0$$

Comme V_0, B_{02}, B_{03}, ne sont pas nuls par hypothèse, on en déduit

$$\frac{d^2 \varphi}{d \gamma^2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \varphi(\gamma) = \alpha . \gamma + \beta$$

(α et β sont les constantes d'intégration).

Il en résulte

$$B_1 = \alpha . V_0 . B_{03} . x_2 + \left(\frac{V_0}{B_{03}} - \alpha . V_0 . B_{02} \right) . x_3 + \beta$$

Le champ total est donc

$$B_i = \begin{bmatrix} \alpha . V_0 . B_{03} . x_2 + \left(\frac{V_0}{B_{03}} - \alpha . V_0 . B_{02} \right) . x_3 + \beta \\ B_{02} \\ B_{03} \end{bmatrix}$$

A partir de ce résultat, on peut facilement calculer la densité de courant à utiliser

$$j_i = \frac{V_0}{\mu} . \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{B_{03}} - \alpha . B_{02} \\ - \alpha . B_{03} \end{bmatrix}$$

La densité de courant obtenue est uniforme et ne peut s'annuler que pour des valeurs particulières des paramètres du système.

On peut séparer les champs d'induction, en effet

$$B_i = B_{ii} + B_{ei}$$

où B_{ii} et B_{ei} sont respectivement les inductions induite et imposée.

$$B_i = \begin{bmatrix} \alpha . V_0 . B_{03} . x_2 + \left(\frac{V_0}{B_{03}} - \alpha . V_0 . B_{02} \right) . x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ B_{02} \\ B_{03} \end{bmatrix}$$

Il apparaît

$$B_{ii} = \begin{bmatrix} \alpha . V_0 . B_{03} . x_2 + \left(\frac{V_0}{B_{03}} - \alpha . V_0 . B_{02} \right) . x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{\varepsilon i} = \begin{bmatrix} \beta \\ B_{02} \\ B_{03} \end{bmatrix}$$

On remarque que le champ extérieur appliqué est uniforme.

3.2. - Cas où $(\vec{B} . \overrightarrow{grad}) \vec{B} = 0$

Cette relation indique que le champ d'induction ne varie pas dans sa propre direction. Le seul paramètre d'origine électromagnétique qui intervient dans le système magnétohydrostatique est la pression électromagnétique $\frac{B_i^2}{2\mu}$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(P + \frac{B_i^2}{2\mu} \right) = 0 \qquad \text{soit} \qquad P = P_0 - \frac{B_i^2}{2\mu}$$

C'est un cas particulier de l'exemple précédent. En effet, supposons le champ d'origine extérieur $B_{\varepsilon i} = 0$, dans cette hypothèse, le calcul n'a plus aucune signification et il faut le reprendre à partir de l'équation initiale

$$B_{02} . \frac{\partial B_1}{\partial x_2} + B_{03} . \frac{\partial B_1}{\partial x_3} = V_0$$

La solution ne peut exister que si $\nabla_0 = 0$, dans ce cas elle est identiquement vérifiée et on en déduit

$$B_1 = f(x_2, x_3)$$

f étant une fonction arbitraire.

L'équation de continuité $\frac{\partial B_1}{\partial x_1} = 0$ est identiquement vérifiée, et l'on doit imposer à $B_1(x_2, x_3)$ d'être aussi une fonction harmonique

$$\frac{\partial^2 B_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 B_1}{\partial x_3^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 0$$

f est alors une fonction analytique et nous pouvons écrire

$$f = f_1(x_2 + i x_3) + f_2(x_2 - i x_3)$$

B_1 étant réel, on en déduit

$B_1 = B_1^*$ (conjugué), c'est-à-dire

$$B_1 = f_1(x_2 + i x_3) + f_1^*(x_2 - i x_3)$$

d'où le champ d'induction B_i

$$B_i = \begin{bmatrix} f_1(x_2 + i x_3) + f_1^*(x_2 - i x_3) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le champ d'induction d'origine extérieure étant nul par hypothèse, B_i correspond au champ induit par une densité de courant j_i

$$j_i = \frac{1}{\mu} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial f_1^*}{\partial x_3} \\ -\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f_1^*}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Il est à noter également que les systèmes magnétohydrostatiques monodimensionnels correspondent au calcul effectué ci-dessus.

3.3. - Cas d'une densité de courant uniforme j_{oi}

Les équations précédentes ne sont pas adaptées pour traiter d'une manière simple le cas de la densité de courant uniforme ; en effet, on peut écrire ici

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \varepsilon_{ijk} \cdot j_{oj} \cdot B_k$$

$$\frac{\partial B_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j^2} = 0$$

$$j_{oi} = \frac{1}{\mu} \cdot \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial B_k}{\partial x_j}$$

Le vecteur induction vérifie toujours ici l'équation de Laplace, en effet

$$\varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varepsilon_{kmn} \cdot \frac{\partial B_n}{\partial x_m} \right) = -\frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j^2} = 0$$

Il en est de même pour l'équation de continuité

$$\frac{\partial B_j}{\partial x_j} = 0$$

Le problème se présente différemment par rapport aux exemples précédents. Le courant stationnaire étant connu par hypothèse, les équations relatives au vecteur induction sont naturellement vérifiées.

La condition d'équilibre peut s'écrire alors

$$\varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varepsilon_{kmn} \cdot B_n \cdot j_m \right) = 0$$

$$B_j \cdot \frac{\partial j_{oi}}{\partial x_j} - B_i \cdot \frac{\partial j_{oj}}{\partial x_j} - j_{oj} \cdot \frac{\partial B_i}{\partial x_j} + j_{oi} \cdot \frac{\partial B_j}{\partial x_j} = 0$$

C'est-à-dire

$$j_{oj} \cdot \frac{\partial B_i}{\partial x_j} = 0$$

On en déduit que

> Tout système magnétohydrostatique, traversé par une densité de courant uniforme, et dont l'induction ne varie pas le long d'une ligne de courant est un système en équilibre.

D'une manière plus concrète, il est aisé de démontrer que cette condition correspond en fait à un problème magnétohydrostatique plan, en effet : dans un système (x_1, x_2, x_3) supposons que la densité de courant j_{oi} soit dirigée suivant l'axe x_1, l'équation précédente s'écrit dans ces conditions

$$j_o \cdot \frac{\partial B_i}{\partial x_1} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\partial B_i}{\partial x_1} = 0$$

B_i ne dépend donc que de (x_2, x_3), il en résulte que :

> Tout système magnétohydrostatique plan, traversé par une densité de courant uniforme est un système en équilibre

On peut alors calculer la pression correspondante en utilisant la relation

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \varepsilon_{ijk} \cdot j_{oj} \cdot B_k$$

Cet exemple est susceptible de nombreuses applications.

3.4. - Systèmes magnétohydrostatiques bidimensionnels

On recherche une méthode propre aux systèmes bidimensionnels.

Soit J_i une densité de courant uniforme, dirigée suivant l'axe x_1, et qui ne dépend que de (x_2, x_3) dans le repère orthonormé (x_1, x_2, x_3). Le champ extérieur et le champ induit sont bidimensionnels dans un plan (x_2, x_3) et ne dépendent que de ces 2 mêmes variables.

L'équation (7) qui est la condition d'équilibre peut s'écrire ici

$$(7') \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}\left[B_2 \cdot \frac{\partial B_3}{\partial x_2} + B_3 \cdot \frac{\partial B_3}{\partial x_3}\right] = \frac{\partial}{\partial x_3}\left[B_3 \cdot \frac{\partial B_2}{\partial x_3} + B_2 \cdot \frac{\partial B_2}{\partial x_2}\right]$$

avec

$$(5') \qquad \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} = 0$$

$$(6') \qquad \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_3^2} = 0$$

Les relations (5') et (7') permettent d'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left[B_2 \cdot \frac{\partial B_3}{\partial x_2} - B_3 \cdot \frac{\partial B_2}{\partial x_2}\right] = \frac{\partial}{\partial x_3}\left[B_3 \cdot \frac{\partial B_2}{\partial x_3} - B_2 \cdot \frac{\partial B_3}{\partial x_3}\right]$$

c'est-à-dire

$$(7'') \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}\left[B_2^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{B_3}{B_2}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x_3}\left[B_3^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{B_2}{B_3}\right)\right]$$

Dans la méthode de résolution générale, il a été établi que les lignes de champ avaient des propriétés particulières lors de la résolution de ces équations. Soit m la pente des lignes de champ, on a alors

$$\frac{dx_2}{B_2} = \frac{dx_3}{B_3} \qquad \frac{dx_2}{dx_3} = \frac{B_2}{B_3} = m$$

3.4.1. - $\underline{m = m_o \text{ (constante)}}$.

L'équation (7'') est vérifiée, et : $B_2 = m_o . B_3$. Les équations (5') et (6') doivent être également satisfaites.

Après substitutions (5') s'écrit :

$$\frac{\partial B_2}{\partial x_3} + m_o . \frac{\partial B_2}{\partial x_2} = 0$$

(5'')

$$\frac{\partial B_3}{\partial x_3} + m_o . \frac{\partial B_3}{\partial x_2} = 0$$

Ces 2 équations sont identiques, les lignes caractéristiques sont définies par

$$dx_3 = \frac{dx_2}{m_o}$$

Après intégration il vient

$$m_o . x_3 - x_2 = C$$ C étant une constante

On remarque encore que les lignes caractéristiques sont les lignes de champ

$$B_2 = f_2 \left(m_o . x_3 - x_2 \right)$$

$$B_3 = f_3 \left(m_o . x_3 - x_3 \right)$$

Ces valeurs obtenues doivent vérifier en outre l'équation (6')

$$\left(1 + m_o^2\right) . \frac{d^2 f_2}{d\left(m_o . x_3 - x_2\right)^2} = 0$$ pour B_2 et de même pour B_3 .

$$B_2 = f_2 = \alpha_2 . \left(m_o . x_3 - x_2\right) + \beta_2$$ (α_i et β_i étant des constantes d'intégration)

$$B_3 = f_3 = \alpha_3 . \left(m_o . x_3 - x_2\right) + \beta_3$$

Le calcul de la densité de courant montre qu'elle est uniforme et on se ramène ainsi à un cas déjà connu.

3.4.2. - Cas général

$$B_2^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{B_3}{B_2}\right) = f_3(x_3)$$

$$B_3^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{B_2}{B_3}\right) = f_2(x_2)$$

les fonctions f_i étant arbitraires.

Ces relations représentent une solution simple de l'équation (7''). Soit $m = \frac{B_2}{B_3}$ la pente des lignes de champ ; en divisant membre à membre, on obtient

$$m^2 \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{m}\right)}{\frac{\partial m}{\partial x_3}} = \frac{f_3(x_3)}{f_2(x_2)}$$

$$\frac{\partial m}{\partial x_2} + \frac{f_3(x_3)}{f_2(x_2)} \cdot \frac{\partial m}{\partial x_3} = 0$$

L'équation des caractéristiques est définie par

$$\frac{dx_2}{f_2(x_2)} = \frac{dx_3}{f_3(x_3)} = ds$$

Le problème dépend alors des 2 fonctions arbitraires f_1 et f_2

$$\int \frac{dx_2}{f_2(x_2)} - \int \frac{dx_3}{f_3(x_3)} = A \qquad \text{(constante)}$$

Après intégration, il vient

$$\varphi_2(x_2) - \varphi_3(x_3) = A$$

La pente des lignes de champ est donc

$$m = \Psi\left[\varphi_2(x_2) - \varphi_3(x_3)\right] = \frac{B_2}{B_3}$$

Ψ étant une fonction arbitraire.

En reportant dans le système initial, on obtient

$$B_2^2 = f_3(x_3) \cdot \frac{1}{\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\Psi}\right)}$$

$$B_3^2 = f_2(x_2) \cdot \frac{1}{\frac{\partial \Psi}{\partial x_3}}$$

Ces relations doivent de plus vérifier les équations (5') et (6'). La résolution est simple pour des fonctions f_1 et f_2 constantes par exemple.

3.5. - Enseignements

Ces exemples, en nombre volontairement limité, montrent que, parallèlement à la méthode générale, il existe des cas particuliers faciles à résoudre au point de vue mathématique et à réaliser pratiquement (densité de courant uniforme).

4. EQUILIBRE DES SYSTEMES MAGNETOHYDROSTATIQUES INSTATIONNAIRES.

4.1. - Equations fondamentales et problème général

Soit un milieu électroconducteur placé en présence d'une densité de courant j_i et d'un champ d'induction B_i , instationnaires. Dans le cas général, l'équilibre n'est possible que pour des fluides incompressibles.

La condition d'équilibre est inchangée mais l'induction obéit dans ce cas à une équation de diffusion, soit

$$(12) \qquad \frac{1}{\sigma . \mu} \cdot \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial B_i}{\partial t} = 0$$

4.2. - Méthode de résolution

Nous rappelons uniquement dans ce paragraphe une méthode de résolution de l'équation de diffusion (12) par la transformée de Fourier.

Avec $\lambda = \frac{1}{\sigma . \mu}$, on a

$$(12) \qquad \lambda . \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial B_i}{\partial t} = 0$$

Recherchons des solutions de la forme

$$B_i = \int_k B_{oik} . e^{-i\omega t} . e^{i k_j x_j} . d\vec{k} . d\omega$$

avec : $d\vec{k} = dk_1 . dk_2 . dk_3$

$$B_i(x_i, t) = \int_k B_{oik} . \delta(i\omega - \lambda . k_j^2) . e^{i k_j x_j} . d\vec{k}$$

ou

$$B_i(x_i, t) = \int_k B_{oik} . e^{-\lambda . k_j^2 . t} . e^{i k_j x_j} . d\vec{k}$$

Le vecteur B_{oik} peut être déterminé par les conditions initiales

$$B_i(x_i, 0) = \int_k B_{oik} . e^{i k_j x_j} . d\vec{k}$$

C'est-à-dire

$$B_{oik} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 . \int_{x_i} B_i(x_i, 0) . e^{-i k_j x_j} . d\vec{x}$$

Le signe somme est pris ici au sens large, c'est-à-dire que le calcul précédent peut s'adapter à des séries de Fourier.

Cette méthode qui est générale, fait suite à la série des équations (1) à (5) pour déterminer complètement le champ d'induction B_i.

4.3. - Exemple : Induction à deux composantes

Les équilibres quasi-stationnaires (ceux qui vérifient l'équation (6)) se réduisent à l'étude du cas stationnaire.

A titre d'exemple, nous prendrons le cas d'une induction magnétique à deux composantes constantes ; il a été établi précédemment que la condition d'équilibre s'écrit

$$B_{02} \cdot \frac{\partial B_1}{\partial x_2} + B_{03} \cdot \frac{\partial B_1}{\partial x_3} = V_0$$

avec la solution suivante

$$B_1 = \frac{V_0}{B_{03}} \cdot x_3 + f\left[V_0 \cdot \left(B_{03} \cdot x_2 - B_{02} \cdot x_3\right), t\right]$$

$$B_1 = \frac{V_0}{B_{03}} \cdot x_3 + \sum f_1 \left[V_0 \cdot \left(B_{03} \cdot x_2 - B_{02} \cdot x_3\right)\right] \cdot f_2(t)$$

ou une somme de solutions de ce type.

B_1 doit vérifier l'équation de diffusion qui s'écrit

$$\lambda \cdot \left(\frac{\partial^2 B_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 B_1}{\partial x_3^2}\right) - \frac{\partial B_1}{\partial t} = 0$$

En reportant ce résultat à la solution type, on obtient

$$f_2 \cdot \lambda \cdot \left[V_0^2 \cdot \left(B_{02}^2 + B_{03}^2\right)\right] \cdot \frac{d^2 f_1}{d\gamma^2} - f_1 \cdot \frac{d f_2}{dt} = 0$$

avec $\gamma = V_0 . (B_{03} . x_2 - B_{02} . x_3)$

Soit

$$\lambda . \left[V_0^2 . (B_{02}^2 + B_{03}^2) \right] . \frac{1}{f_1} . \frac{d^2 f_1}{d\gamma^2} = \frac{1}{f_2} . \frac{df_2}{dt} = - a^2$$

ou

$$\frac{df_2}{dt} + a^2 . f_2 = 0$$

$$\frac{d^2 f_1}{d\gamma^2} + \frac{a^2}{\lambda . \left[V_0^2 . (B_{02}^2 + B_{03}^2) \right]} . f_1 = 0$$

Posons

$$b^2 = \frac{a^2}{\lambda . \left[V_0^2 . (B_{02}^2 + B_{03}^2) \right]}$$

Les solutions sont

$$f_2 = \alpha_2 . e^{- a^2 . t}$$

$$f_1 = \alpha_1 . e^{ib\gamma} + \alpha_1' . e^{-ib\gamma}$$

Par conséquent

$$B_1(x_2, x_3, t) = \frac{V_0}{B_{03}} . x_3 + \sum_a e^{- a^2 . t} . \left[\alpha(a) . e^{ib\gamma} + \alpha'(a) . e^{-ib\gamma} \right]$$

où le signe $\sum$ est pris au sens large.

On en déduit l'expression de la densité de courant non uniforme j_1 .

$$j_i = \frac{1}{\mu} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{V_0}{B_{03}} + \sum_a e^{-a^2 t} \cdot \left(i.b.\alpha(a).e^{ib\gamma} - i.b.\alpha'(a).e^{-ib\gamma} \right) \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x_3} \\ - \sum_a e^{-a^2 t} \cdot \left(i.b.\alpha(a).e^{ib\gamma} - ib\alpha'(a).e^{-ib\gamma} \right) \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Séparons le champ d'induction induit de celui d'origine extérieure, soit

$$B_{ei} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{02} \\ B_{03} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B_{ii} = \begin{bmatrix} \frac{V_0}{B_{03}} . x_3 + \sum_a e^{-a^2 t} \cdot \left(\alpha(a).e^{ib\gamma} + \alpha'(a) e^{-ib\gamma} \right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cet exemple montre que les solutions sont ici plus générales que dans le cas des phénomènes stationnaires. L'équation de diffusion est moins restrictive que l'équation de Laplace.

Nous limiterons à ce cas les exemples de magnétohydrostatique instationnaire.

4.4. - Remarque

La magnétohydrostatique instationnaire ne présente guère de difficultés supplémentaires mais les résultats sont plus généraux.

Le fluide est soumis en général à des forces dépendant du temps, il se développe, même pour les liquides, des mouvements dus à la compressibilité

du milieu et ce phénomène est particulièrement sensible lorsque les longueurs d'onde acoustique ainsi obtenues sont de l'ordre de grandeur des dimensions du système. Ce phénomène sera mis en évidence et fera l'objet d'une étude dans un chapitre ultérieur. Ces systèmes appartiennent au domaine de la dynamique des vibrations.

Sur le plan mathématique, les équations d'origine électrique attirent quelques remarques, en effet, si on prend le rotationnel de l'équation (12), il vient

$$(12') \qquad \frac{1}{\sigma.\mu}.\frac{\partial^2 j_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial j_i}{\partial t} = 0$$

Le milieu étant au repos, la loi d'ohm permet d'écrire

$$(12'') \qquad \frac{1}{\sigma\mu}.\frac{\partial^2 E_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial E_i}{\partial t} = 0$$

Le vecteur densité de courant obéit ici à une équation de diffusion, et nous pouvons donc disposer ainsi d'une méthode analogique basée sur des mesures de champ électrique.

5. ASPECT VARIATIONNEL DU PROBLEME [6]

5.1. - Travail des forces magnétiques pour un déplacement virtuel $\delta\vec{x}$ du milieu

Soit une densité de courant $\vec{j}$, circulant à l'intérieur d'une surface (S) limitant un volume (τ).

$$\delta\mathcal{E} = \int_{(\tau)} \delta\vec{x}.(\vec{j}\wedge\vec{B}).d\tau = \int_{(\tau)} (\delta\vec{x}\wedge\vec{j}).\overrightarrow{Rot}\,\vec{A}.d\tau$$

A partir de l'identité

$$div[\vec{A}\wedge(\delta\vec{x}\wedge\vec{j})] = (\delta\vec{x}\wedge\vec{j}).\overrightarrow{Rot}\,\vec{A} - \vec{A}.\overrightarrow{Rot}(\delta\vec{x}\wedge\vec{j})$$

et en reportant dans l'intégrale, il vient

$$\delta\mathcal{E} = \int_{(S)} \left[\vec{A} \wedge (\delta\vec{x} \wedge \vec{j}')\right] . \vec{n} . dS + \int_{(\tau)} \vec{A} . \vec{Rot}(\delta\vec{x} \wedge \vec{j}') . d\tau$$

On suppose que la surface (S) délimite notre système magnétohydrostatique, c'est-à-dire que le courant circule uniquement à l'intérieur de (S), donc

$$\vec{n} . \delta\vec{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \vec{n} . \vec{j} = 0$$

L'intégrale de surface est nulle, de plus

$$\delta\vec{j} = \vec{Rot}(\delta\vec{x} \wedge \vec{j})$$

$$\delta\mathcal{E} = \int_{(\tau)} (\vec{A} . \delta\vec{j}) . d\tau$$

5.2. - <u>Fonction de Lagrange d'une distribution continue de courant</u>

$$\mathcal{L} = \mathcal{E} = \int_{(\tau)} \int_0^{\vec{j}} (\vec{A} . \delta\vec{j}) . d\tau$$

La définition de la fonction de Lagrange d'une distribution continue est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} . \int_{(\tau)} (\vec{j} . \vec{A}) . d\tau$$

C'est-à-dire

$$\delta\mathcal{L} = \frac{1}{2} . \int_{(\tau)} (\vec{j} . \delta\vec{A} + \vec{A} . \delta\vec{j}) . d\tau$$

En comparant avec la relation précédente, on a

$$\mathcal{L} = \int_{(\tau)} \int_0^{\vec{j}} (\vec{A} . \delta \vec{j}) . d\tau = \int_{(\tau)} \int_0^{\vec{j}} (\vec{j} . \delta \vec{A}) . d\tau$$

5.3. - Equilibre d'un système magnétohydrostatique

La force agissante est

$$F_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$$

Soit F'x les forces s'opposant aux forces magnétiques, on a alors

$$F_x + F'_x = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + F'_x = 0$$

Nous voyons apparaître la nécessité pour F'_x de dériver d'un potentiel scalaire

$$\frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{L} - \phi) = 0$$

L'équilibre existe si $(\mathcal{L} - \phi)$ est extremum.

5.4. - Expression de la fonction de Lagrange

$$\delta \mathcal{L} = \int_{(\tau)} (\vec{A} . \delta \vec{j}) . d\tau$$

Nous utiliserons l'identité suivante

$$\operatorname{div}(\vec{A} \wedge \delta \vec{B}) = \delta \vec{B} . \overrightarrow{Rot}\, \vec{A} - \vec{A} . \overrightarrow{Rot}\, \delta \vec{B}$$

avec

$$\overrightarrow{Rot}\,\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j}$$

$$\overrightarrow{Rot}\,\vec{A} = \vec{B}$$

Donc

$$\int_{(S)} (\vec{A} \wedge \frac{\delta \vec{B}}{\mu_0}) \cdot \vec{m} \cdot dS = \int_{(\tau)} \frac{\vec{B} \cdot \delta \vec{B}}{\mu_0} \cdot d\tau - \int_{(\tau)} \vec{A} \cdot \delta \vec{j} \cdot d\tau$$

d'où

$$\delta \mathcal{L} = \int_{(\tau)} \frac{\vec{B} \cdot \delta \vec{B}}{\mu_0} \cdot d\tau - \int_{(S)} (\vec{A} \wedge \frac{\delta \vec{B}}{\mu_0}) \cdot \vec{m} \cdot dS$$

Après un calcul simple, il vient

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2 \cdot \mu_0} \cdot \int_{(\tau)} \vec{B}^2 \cdot d\tau \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tau} = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$$

Nous retrouvons donc l'expression de la pression électromagnétique qui correspond ici à la fonction de Lagrange par unité de volume.

6. ANALOGIE HYDRODYNAMIQUE DE L'EQUILIBRE MAGNETOHYDROSTATIQUE [8]

Dans des conditions particulières, les équations de la magnétohydrostatique présente une analogie formelle avec celles de l'écoulement d'un fluide incompressible. Nous nous proposerons donc dans ce paragraphe de définir d'une

manière aussi précise que possible, les éléments de cette correspondance afin que les problèmes traités puissent s'appliquer aux écoulements hydrodynamiques.

6.1. - Cas d'un fluide parfait irrotationnel

L'équation du mouvement stationnaire irrotationnel d'un fluide parfait incompressible est

$$(13) \qquad u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{P}{\rho}\right)$$

avec

$$(14) \qquad \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = 0$$

$$(15) \qquad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

En prenant le rotationnel de l'équation (14) et en tenant compte de la relation (15), il vient

$$(16) \qquad \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = 0$$

La condition d'existence de l'équation (13) est

$$(17) \qquad \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} u_k\right) = 0$$

Nous pouvons donc en déduire le tableau comparatif suivant

Magnétostatique	Hydrodynamique
$\frac{1}{\mu} \cdot B_j \cdot \frac{\partial B_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(P + \frac{B_j^2}{2\mu}\right)$	$\rho \cdot u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{P}{\rho}\right)$
$\frac{\partial B_j}{\partial x_j} = 0$	$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$

$\frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j^2} = 0$	$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = 0$
$\frac{B_i}{\sqrt{\mu}}$	$-\sqrt{\rho} \cdot u_i$
$P + \frac{B_j^2}{2\mu}$	P

Il y a semble-t-il une analogie formelle et complète, il faut cependant y apporter quelques restrictions ; en particulier, d'après le tableau précédent, il doit y avoir correspondance entre le vecteur tourbillon $T_i = \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$ et la densité de courant $j_i = \frac{1}{\mu} \cdot \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial B_k}{\partial x_j}$. Cependant, dans le cas d'un fluide parfait irrotationnel, le système magnétohydrostatique analogique n'est traversé par aucun courant, l'analogie est alors impossible.

Seule la résolution de l'équation (17) sera identique, ensuite, dans le cas hydrodynamique, il faut ajouter les conditions

(14) $$\varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = 0$$

(15) $$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

La vérification de la relation (17) ne se pose pas dans le cas de l'hydrodynamique d'un fluide irrotationnel car

$$u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_j^2}{2} \right)$$

6.2. - Recherche d'une analogie formelle complète

Pour une analogie complète, l'écoulement équivalent doit être tourbillonnaire ; soit T_i le vecteur tourbillon non nul.

Dans le cas de la magnétohydrostatique, le vecteur j_i équivalent au vecteur T_i, obéit à la loi d'Ohm

$$j_i = \sigma . E_i \quad \text{(milieu au repos)} \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon_{ijk} . \frac{\partial j_k}{\partial x_j} = 0$$

Par conséquent, l'expression analogue à la loi d'Ohm pour l'écoulement tourbillonnaire est

$$\varepsilon_{ijk} . \frac{\partial T_k}{\partial x_j} = 0 \qquad \text{ou} \qquad T_i = \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$$

Nous pouvons en déduire que le vecteur vitesse a ses composantes harmoniques

$$\varepsilon_{ijk} . \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varepsilon_{kmn} . \frac{\partial u_n}{\partial u_m} \right) = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = 0$$

Les conditions précédentes étant remplies, on définit un écoulement analogique d'un fluide visqueux et incompressible, à vecteur tourbillon irrotationnel.

L'analogie formelle et complète peut se définir de deux manières différentes, suivant les correspondances dans les tableaux (A) et (B).

A

Magnétohydrostatique	Hydrodynamique
$\frac{1}{\mu} . B_j . \frac{\partial B_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(P + \frac{B_j^2}{2\mu} \right)$	$\rho . u_j . \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial P}{\partial x_i}$
$\frac{B_i}{\sqrt{\mu}}$	$-\sqrt{\rho} . u_i$

$$P + \frac{B_j^2}{2\mu}$$

$$\sqrt{\mu} \cdot j_i = \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{B_k}{\sqrt{\mu}}\right)$$

$$\frac{\partial B_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j^2} = 0$$

$$P$$

$$\sqrt{\rho} \cdot T_i = \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sqrt{\rho} \cdot u_k\right)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = 0$$

B

Magnétohydrostatique

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{1}{\mu} \cdot \varepsilon_{mil} \cdot \left(\varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial B_k}{\partial x_j}\right) \cdot B_l$$

$$\frac{B_i}{\sqrt{\mu}}$$

$$P$$

$$\sqrt{\mu} \cdot j_i = \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{B_k}{\sqrt{\mu}}\right)$$

$$\frac{\partial B_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j^2} = 0$$

Hydrodynamique

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(P + \rho \frac{u_j^2}{2}\right) = \rho \cdot \varepsilon_{mil} \cdot \left(\varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \cdot u_l$$

$$-\sqrt{\rho} \cdot u_i$$

$$P + \rho \cdot \frac{u_j^2}{2}$$

$$\sqrt{\rho} \cdot T_i = \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_k \cdot \sqrt{\rho}\right)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = 0$$

Les conditions d'équilibre sont dans les deux cas similaires.

Il y a équivalences possibles concernant les pressions

$$P \longrightarrow P + \frac{B_j^2}{2\mu}$$

$$P + \frac{1}{2}\rho u_j^2 \longrightarrow P$$

Les vecteurs u_i et B_i permuttent.

Malgré l'hypothèse d'un fluide visqueux, ce phénomène n'intervient pas dans les relations d'équivalence car les composantes du vecteur vitesse u_i sont des fonctions harmoniques. Physiquement, le profil des vitesses ne fait pas intervenir les frottements d'une couche de fluide sur l'autre.

C

Equivalence des lois, généralisation

Magnétohydrostatique	Hydrodynamique
Loi d'Ohm :	
$j_i = \sigma . E_i = - \sigma . \frac{\partial V}{\partial x_i}$	$T_i = - \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$
Théorème d'Ampère :	
$\varepsilon_{ijk} . \frac{\partial B_k}{\partial x_j} = \mu . j_i$	$T_i = \varepsilon_{ijk} . \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$
$\oint B_j . dl_j = \iint_{(S)} \mu\, j_i . n_j . dS$	$\oint u_j . dl_j = \iint_{(S)} T_j . n_j . dS$

Continuité	
$\frac{\partial B_j}{\partial x_j} = 0$	$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$
Conséquence	
$\frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j^2} = 0$	$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = 0$

On remarque que l'analogie formelle n'est possible qu'en régime stationnaire.

La différence s'effectue d'abord sur la loi d'Ohm

$$\varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = - \sigma \cdot \frac{\partial B_i}{\partial t}$$ (Loi de Lenz-Faraday)

L'autre différence apparaît dans la loi du mouvement par un terme d'inertie.

6.3. - Exemples

6.3.1. - Magnétohydrostatique : le pincement linéaire

Soit un système à symétrie axiale contenant un fluide conducteur parcouru par une densité de courant à symétrie axiale j, non nécessairement uniforme.

La condition d'équilibre s'écrit

$$\varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left(B_j \cdot \frac{\partial B_k}{\partial x_j} \right) = 0$$

Il a été démontré dans les chapitres précédents que cette condition est vérifiée dans le cas bidimensionnel. L'équilibre est donc réalisé. Les lignes de champ sont des cercles centrés sur (Δ) et le vecteur B_i reste constant le long d'une ligne de courant , c'est un système monodimensionnel avec

$$B_j \cdot \frac{\partial B_i}{\partial x_j} = 0$$

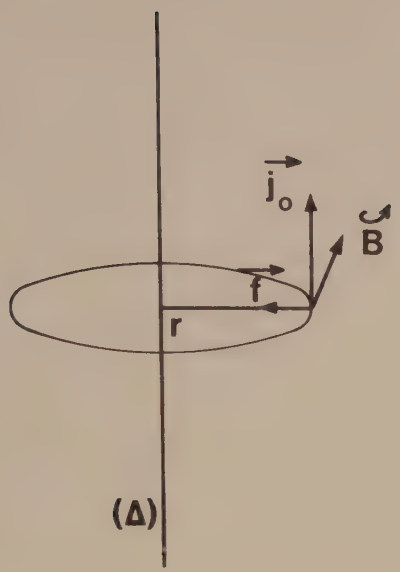


Figure 1

Ceci se traduit par un pincement du fluide autour de l'axe (Δ) (figure 1).

L'équation d'équilibre s'écrit en projection radiale

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(P + \frac{B^2}{2\mu}\right) = 0$$

On en déduit

$$P - P_0 = -\frac{B^2}{2\mu}$$

Le calcul de la circulation de B le long d'un cercle de rayon r et centré sur (Δ) donne

$$B = \frac{\mu}{r} \cdot \int_0^r j(r) \cdot r \cdot dr$$

Si $j(r)$ est constant et égal à j_0, on a

$$B = \frac{\mu \cdot j_0 \cdot r}{2} \qquad \text{et} \qquad P - P_0 = -\frac{\mu}{2}\left(\frac{j_0 \cdot r}{2}\right)^2$$

En régime stationnaire, seule la densité de courant uniforme est, dans ce cas, possible à produire $\left(\varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial j_k}{\partial x_j} = 0\right)$ du fait de la loi d'Ohm.

On observe que dans cette hypothèse, il y a absence de champ d'induction d'origine extérieure.

6.3.2. - Hydrodynamique : Analogie hydrodynamique du pincement linéaire

Nous supposerons que le vecteur tourbillon est uniforme dans le cas de cet écoulement.

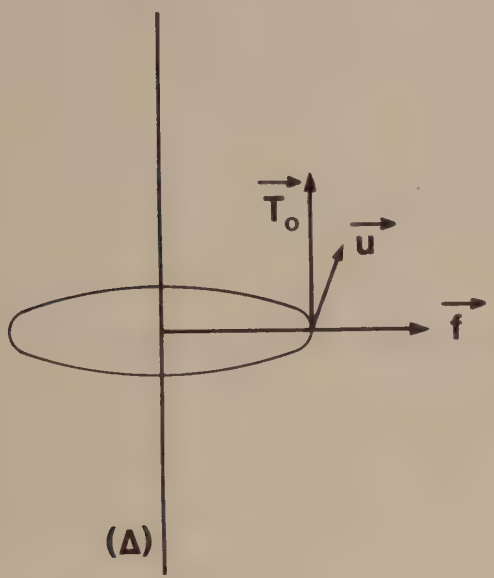


Figure 2

Considérons un fluide incompressible en rotation autour d'un axe (Δ), de telle manière que le vecteur tourbillon T_{oi} soit constant. Le vecteur vitesse est alors tangentiel, et le système hydrodynamique est à symétrie axiale (figure 2).

Comme précédemment on a

$$\varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) = 0$$

La vitesse ne varie pas dans sa propre direction et la condition d'équilibre est vérifiée.

L'équivalent hydrodynamique du théorème d'Ampère, nous donne alors

$$T_o = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot u) \qquad \text{donc} \qquad u = T_o \cdot \frac{r}{2}$$

Le même résultat peut être obtenu en calculant la circulation du vecteur vitesse u sur un cercle centré sur (Δ). Les vecteurs B et u suivent la même loi et on en déduit la pression hydrostatique

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(P + \rho \cdot \frac{u^2}{2} \right) = 0$$

$$P - P_o = - \frac{T_o^2}{2} \cdot \rho \cdot \frac{r^2}{4}$$

6.3.3. - Comparaison des résultats

Magnétohydrostatique	Hydrodynamique
$\frac{B}{\sqrt{\mu}} = \frac{j_0 \cdot \sqrt{\mu}}{2} \cdot r$	$u \cdot \sqrt{\rho} = \frac{\sqrt{\rho} \cdot T_0}{2} \cdot r$
$P - P_0 = -\frac{\mu}{2} \cdot \left(\frac{j_0 \cdot r}{2}\right)^2$	$P - P_0 = -\frac{\rho}{2}\left(\frac{T_0 \cdot r}{2}\right)^2$

Ces différentes grandeurs suivent les mêmes lois.

Les systèmes magnétohydrostatiques et hydrodynamiques forment des systèmes analogiques. Cette correspondance peut être utile, en particulier pour la mesure des grandeurs qui les caractérisent.

- Il est préférable de mesurer des vitesses plutôt que des inductions qui sont en général très faibles.

- Il est préférable de mesurer des densités de courant plutôt que des vecteurs tourbillon dont la mesure directe présente des difficultés. C'est surtout ce point qui est intéressant, car les mesures électriques équivalentes sont plus accessibles.

- La pression est la grandeur commune de ces analogies. Les pressions hydrodynamiques sont en général numériquement bien supérieures aux pressions électromagnétiques, en particulier dans le cas du champ induit seul.

- Toutes les théories établies dans le paragraphe précédent, concernant la validité de la condition d'équilibre s'appliquent point par point à l'hydrodynamique, ainsi que tous les exemples qui ont été traités. Si la condition d'équilibre n'est pas réalisée pour des écoulements, ils sont en général instables.

6.4. - Conclusion

La recherche d'une condition nécessaire pour réaliser l'équilibre des systèmes magnétohydrostatiques nous a ramenés à la résolution de systèmes d'équations aux dérivées partielles générales de la magnétohydrostatique. Une application simplifiée de cette méthode permet d'établir des critères d'équilibre dans des cas particuliers importants (densité de courant uniforme).

Les systèmes magnétohydrostatiques ainsi obtenus ont la particularité de transformer le courant électrique en pression.

7. ETUDE D'UN CAS PARTICULIER

On se propose de réaliser un système magnétohydrostatique constitué par une cavité de section rectangulaire, contenant un fluide conducteur, en présence d'un champ d'induction uniforme d'origine extérieure, et parcouru par une densité de courant uniforme.

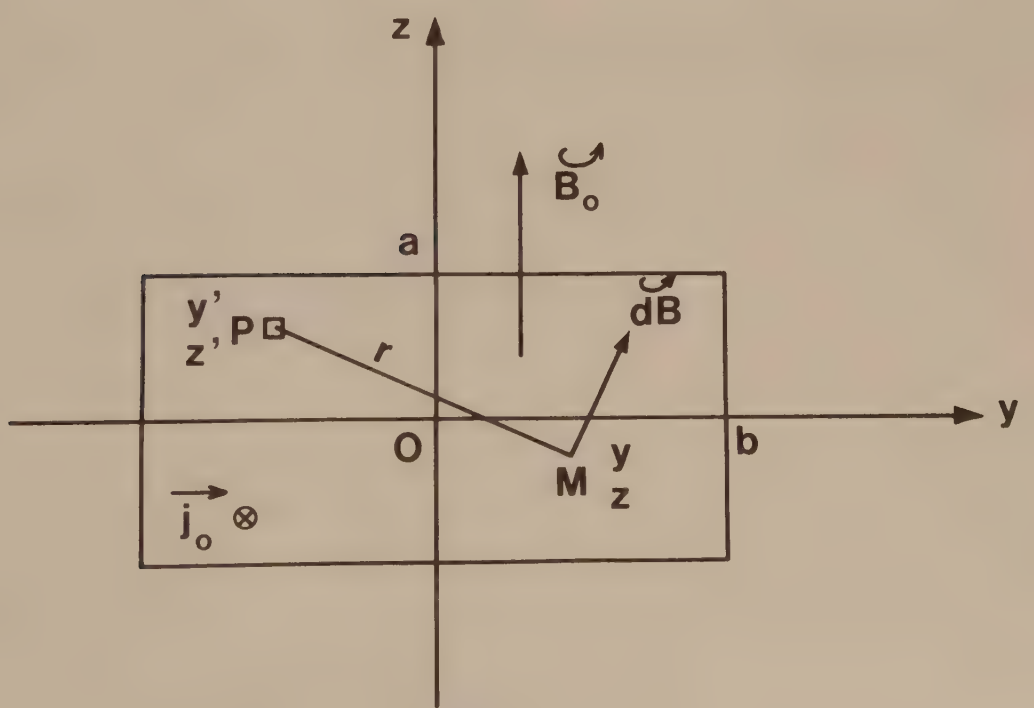


Figure 3

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \varepsilon_{ijk} \cdot j_j \cdot \left(B_k + B_{0k} \right)$$

$$j_i = \frac{1}{\mu} \cdot \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial B_k}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial B_j}{\partial x_j} = 0$$

D'après les résultats du chapitre précédent, ce système, traversé par une densité de courant uniforme et placé en présence d'un champ d'induction uniforme extérieure, est en équilibre.

7.1. - Calcul du champ d'induction créé par cette répartition de courant

Pour calculer l'induction induite, il est commode d'utiliser le théorème d'Ampère.

Soit un élément de surface en P, il créé en M l'induction

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot j_0 \cdot dy' \cdot dz'$$ perpendiculaire à MP (fig. 3)

En projetant dB sur les deux axes, nous avons

$$dB_y = dB \cdot \frac{z' - z}{r}$$

$$dB_z = dB \cdot \frac{y' - y}{r}$$

Calculons dB_y

$$dB_y = \frac{\mu_0 \cdot j_0}{2\pi} \cdot \frac{(z' - z) \cdot dy' \cdot dz'}{r^2}$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot j_0}{2\pi} \cdot \frac{(z' - z) \cdot dy' \cdot dz'}{(z' - z)^2 + (y' - y)^2}$$

$$dB_y = \frac{\mu_0 \cdot j_0}{2\pi} \cdot \frac{(z'-z)\cdot dy' \cdot dz'}{(z'-z)^2 + (y'-y)^2}$$

Posons $\begin{cases} u = y' - y \\ v = z' - z \end{cases}$

Il vient alors

$$dB_y = \frac{\mu_0 \cdot j_0}{2\pi} \cdot \frac{v \cdot du \cdot dv}{u^2 + v^2}$$

Tous calculs faits, on obtient

$$B_y = \frac{\mu_0 \cdot j_0}{4\pi} \cdot \left[\begin{array}{l} (b-y) \cdot \operatorname{Log} \dfrac{(b-y)^2 + (a-z)^2}{(b-y)^2 + (a+z)^2} + \dfrac{1}{2} \cdot (a-z) \operatorname{Arctg} \dfrac{b-y}{a-z} - \dfrac{1}{2} \cdot (a+z) \cdot \operatorname{Arctg} \dfrac{b-y}{a+z} \\ \\ + (b+y) \cdot \operatorname{Log} \dfrac{(b+y)^2 + (a-z)^2}{(b-y)^2 + (a+z)^2} + \dfrac{1}{2} \cdot (a-z) \cdot \operatorname{Arctg} \dfrac{b+y}{a-z} - \dfrac{1}{2} \cdot (a+z) \cdot \operatorname{Arctg} \dfrac{b+y}{a+z} \end{array} \right]$$

En remplaçant b par a et z par y, on a en définitive B_z

$$B_z = \frac{\mu_0 \cdot j_0}{4\pi} \cdot \left[\begin{array}{l} (a-z) \cdot \operatorname{Log} \dfrac{(b-y)^2 + (a-z)^2}{(b+y)^2 + (a-z)^2} + \dfrac{1}{2} \cdot (b-y) \cdot \operatorname{Arctg} \dfrac{a-z}{b-y} - \dfrac{1}{2} \cdot (b+y) \cdot \operatorname{Arctg} \dfrac{a-z}{b+y} \\ \\ + (a+z) \cdot \operatorname{Log} \dfrac{(b-y)^2 + (a+z)^2}{(b+y)^2 + (a+z)^2} + \dfrac{1}{2} \cdot (b-y) \cdot \operatorname{Arctg} \dfrac{a+z}{b-y} - \dfrac{1}{2} \cdot (b+y) \cdot \operatorname{Arctg} \dfrac{a+z}{b+y} \end{array} \right]$$

7.2. - Calcul de la pression correspondante

Nous recherchons des solutions de l'équation d'équilibre

$$\frac{\partial P}{\partial y} = j_0 \cdot (B_0 + B_z) \qquad j_0 = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \right)$$

avec

$$\frac{\partial P}{\partial z} = - j_0 \cdot B_y \qquad \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$P = - j_0 \cdot \int B_y \cdot dz + \varphi_{(y)}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = - j_0 \cdot \int \frac{\partial B}{\partial y} \cdot dz + \frac{d\varphi}{dy} = j_0 \cdot \int \frac{\partial B_z}{\partial z} \cdot dz + \frac{d\varphi}{dy}$$

$$= j_0 \cdot B_z + \frac{d\varphi}{dy} = j_0 \cdot (B_0 + B_z)$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = j_0 \cdot B_0 \qquad \varphi_{(y)} = j_0 \cdot B_0 \cdot (y - y_0)$$

Donc

$$P = j_0 \cdot \left[B_0 \cdot (y - y_0) - \int B_y \cdot dz \right]$$

La différence de pression de chaque côté de ce système, qui constitue une pompe électromagnétique, est

$$[\Delta P]_{-b}^{+b} = - j_0 \cdot \left[\int B_y(b,z) \cdot dz - \int B_y(-b,z)\, dz + 2 \cdot b \cdot B_0 \right]$$

La symétrie de l'induction par rapport à l'origine donne

$$B_y(b,z) = B_y(-b,z)$$

$$[\Delta P]_{-b}^{+b} = 2.b.j_0.B_0$$

ΔP représente la différence de pression entre 2 points de cote z. D'autre part,

$$j_0 = \frac{I}{4.a.b}$$

$$[\Delta P] = B_0 . \frac{I}{2a}$$

Malgré la présence d'un profil de pression, $[\Delta P]$ est constant entre 2 points de même cote z. C'est cette propriété qui sera utilisée en vue de l'application pratique.

8. UTILISATION

Le système magnétohydrostatique étudié précédemment peut être utilisé comme un générateur de pression différentielle

$$\Delta P = \frac{B.I}{2a}$$

Nous pouvons l'employer, par exemple, pour l'étalonnage en amplitude de capteur piézoélectrique. Du fait même du principe de fonctionnement d'un capteur piézoélectrique, il est nécessaire d'obtenir une pression différentielle rapidement variable.

8.1. - Le capteur piézoélectrique

8.1.1. - Rappel de la théorie des récepteurs piézoélectriques.

Un récepteur piézoélectrique est composé d'une pastille cylindrique, dont les deux faces métallisées constituent une capacité Co ; on exerce une force F

perpendiculairement à l'une des faces et, en régime quasi-stationnaire, il apparaît la charge

$$Q = e_{ik} \cdot \frac{F}{c_{kk}}$$

e_{ik}, c_{kk} : éléments du tenseur piézoélectrique.

La capacité du récepteur étant Co, il vient

$$C_o = \frac{\varepsilon_o . \varepsilon_r . S}{\ell}$$

La tension est

$$V = \frac{F . e_{ik} . \ell}{c_{kk} . \varepsilon_o . \varepsilon_r . S}$$

On peut définir un rapport de transformation α et un coefficient de couplage électromécanique du récepteur piézoélectrique.

$$\alpha = \frac{e_{ik}}{\sqrt{c_{kk} . \varepsilon_o . \varepsilon_r}}$$

ainsi que la sensibilité

$$\frac{V}{F} = \frac{k_c^2}{\alpha}$$

Si u est la vitesse de déformation de la pastille piézoélectrique, on a

$$u = \frac{F\,(\text{totale})}{Z\,(\text{totale})} = \frac{F}{Z_{mec} + \alpha^2 . Z_{el}}$$

La quantité d'électricité qui apparaît induit la force

$$F_{el} = \alpha . V = u . \alpha^2 . Z_{el}$$

$$= F . \frac{\alpha^2 . Z_{el}}{Z_{mec} + \alpha^2 . Z_{el}}$$

En définitive

$$(18) \quad Q = \frac{e_{ik}}{c_{kk}} \cdot \left(\frac{\Delta P}{S}\right) = k \cdot \Delta P$$

$[\Delta P]$ est la pression différentielle et k un coefficient à déterminer.

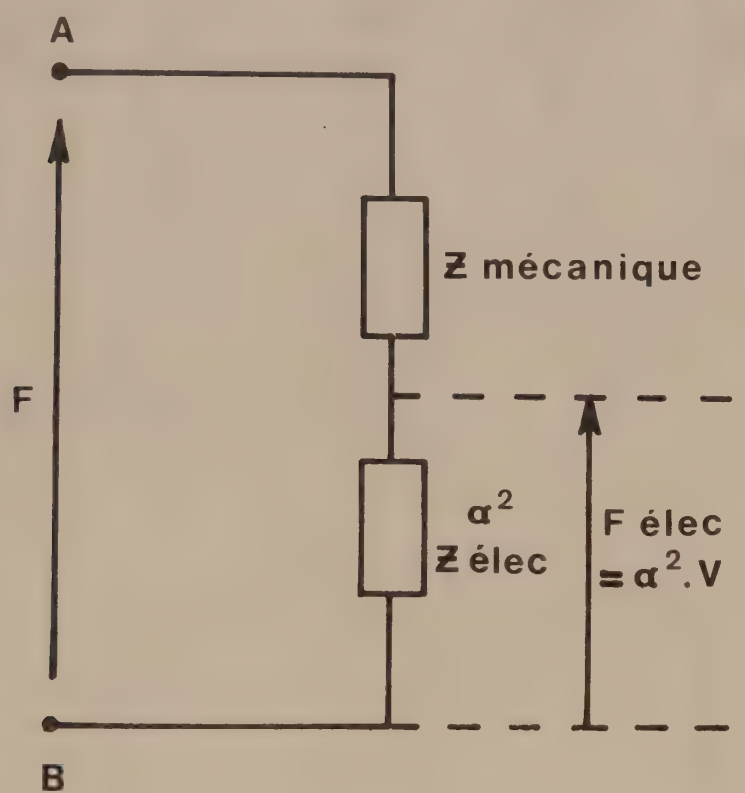


Figure 4

8.1.2. - Le schéma équivalent

Soit R_o la résistance du matériau piézoélectrique situé entre les armatures, l'ensemble comporte en outre sa propre source de charges.

La figure 5 montre la constitution du dispositif de mesure. Il est commode de condenser ce schéma électrique en posant

$$C = C_1 + C_2$$

(figure 6)

$$R = \frac{R_o . R_1}{R_o + R_1}$$

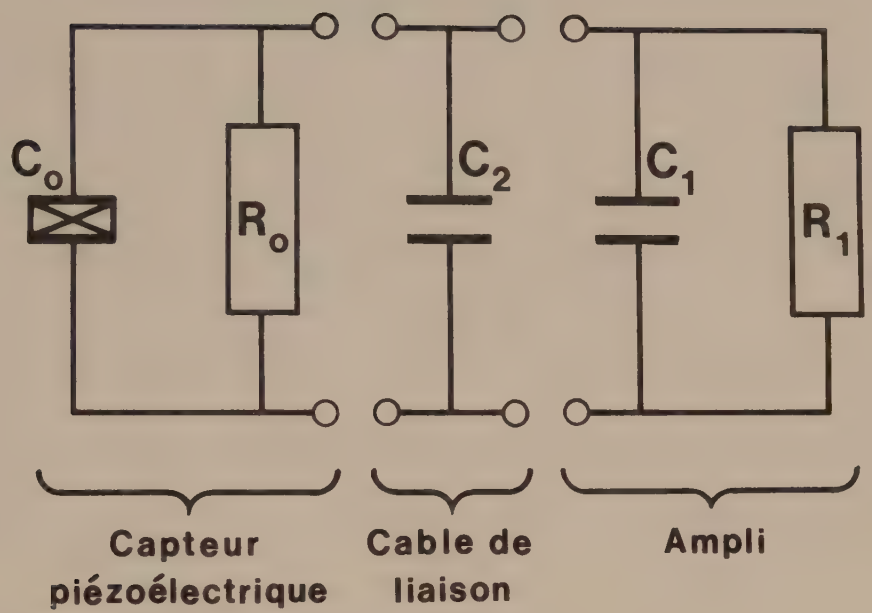


Figure 5

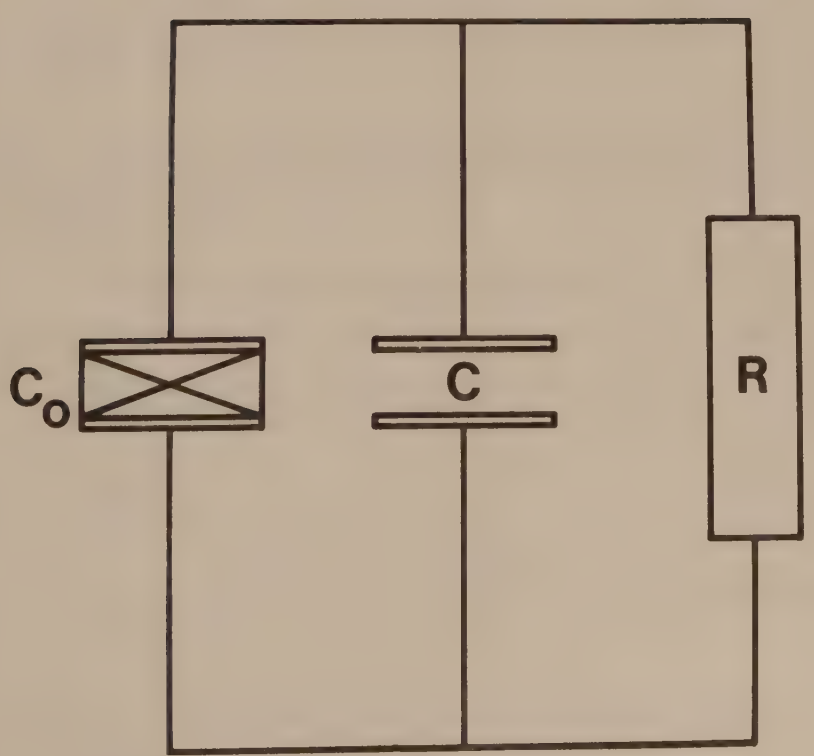


Figure 6

8.1.3. - Mise en équation

Soit q(t) la charge répartie sur l'ensemble des 2 capacités Co et C à l'instant t, à l'instant (t+dt), cette charge a varié de dq.

Il faut évaluer dq

$$dq = dq' + dq''$$

dq' est la charge apportée par effet piézoélectrique

dq'' est la charge de fuite dans la résistance R.

$$dq' = dQ$$

$$dq'' = -q(t) \cdot \frac{dt}{\tau} \qquad \text{avec} \quad \tau = R.(C_o + C)$$

En définitive

$$dq = -q \cdot \frac{dt}{\tau} + dQ$$

et

$$(19) \qquad \frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = \frac{dQ}{dt}$$

8.2. - Création d'une pression différentielle rapidement variable et étalonnage d'un capteur piézoélectrique

A une fréquence petite devant la fréquence propre d'un capteur de pression piézoélectrique (la quantité d'électricité Q mise en jeu étant proportionnelle à la variation de pression) on peut écrire en valeurs instantanées

$$Q = k. [\Delta P]$$

Le problème est de déterminer la constante d'étalonnage k caractéristique du capteur.

On utilise à cet effet une pompe magnétohydrostatique qui permet des variations de pression calculables d'une manière simple.

Dans ces conditions la densité de courant est uniforme et la pression est connue. I étant l'intensité du courant d'alimentation et B_o le champ d'induction magnétique d'origine extérieure, supposé uniforme, on a

$$\Delta P = \frac{B \cdot I}{2a}$$ en valeurs instantanées.

8.2.1. - Le régime transitoire

Lors de la mise sous tension continue de la pompe, le courant suit la loi classique

$$I = I_o \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau'}}\right)$$

τ' étant la constante de temps du circuit d'alimentation et I_o l'intensité en régime permanent.

Donc

$$\Delta P_{(t)} = \frac{B \cdot I_o}{2a} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau'}}\right)$$

Il apparaît la charge

$$Q = k \cdot \Delta P = \frac{k \cdot B \cdot I_o}{2a} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau'}}\right)$$

$$= k \cdot \Delta P_o \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau'}}\right)$$

$$\frac{dQ}{dt} = k \cdot \Delta P_o \cdot \frac{1}{\tau'} \cdot e^{-\frac{t}{\tau'}}$$

L'équation (19) s'écrit alors

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = k \cdot \Delta P_o \cdot \frac{1}{\tau'} \cdot e^{-\frac{t}{\tau'}}$$

En utilisant la transformée de CARSON de cette équation, on obtient

$$q(t) = \frac{k.\Delta P_o}{\tau'} \cdot \frac{e^{-\frac{t}{\tau'}} - e^{-\frac{t}{\tau}}}{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'}}$$

Aux bornes du capteur, on enregistre la tension

$$(20) \quad V(t) = \frac{q(t)}{C_o + C} = \frac{k.\Delta P_o}{\tau'.(C_o+C)} \cdot \frac{e^{-\frac{t}{\tau'}} - e^{-\frac{t}{\tau}}}{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'}}$$

La fonction V(t) passe par un maximum.

En effet

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{k.\Delta P_o}{\tau'.(C_o+C)} \cdot \frac{\tau.\tau'}{\tau'-\tau} \cdot \left[-\frac{1}{\tau'} \cdot e^{-\frac{t}{\tau'}} + \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$$

Cette dérivée est nulle pour

$$t_o = \frac{\tau.\tau'}{\tau'-\tau} \cdot \text{Log} \frac{\tau'}{\tau}$$

$$V_{MAX} = V(t_o)$$

Etudions le cas particulier suivant

$$\tau = \tau'$$

Il est également aisé d'accorder le circuit-pompe au circuit-capteur.

L'équation (19) devient alors

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = k \cdot \Delta P_0 \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

En utilisant la transformée de LAPLACE, on obtient

(21) $$q(t) = \frac{k \cdot \Delta P_0}{\tau} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$V(t) = \frac{q(t)}{C_0 + C}$$

$$= \frac{k \cdot \Delta P_0}{\tau (C_0 + C)} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Le maximum de cette fonction V(t) est

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{k \cdot \Delta P_0}{\tau (C_0 + C)} \cdot \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$ qui s'annule pour $t = \tau$

(22) $$V_M = V(\tau) = \frac{k \cdot \Delta P_0}{e \cdot (C_0 + C)}$$

8.2.2. - Le régime sinusoïdal

Supposons la pompe électromagnétique alimentée par un courant alternatif de pulsation ω , la pression (ΔP) s'exprime par

$$\Delta P = \frac{B \cdot I_0}{2a} \cdot e^{i\omega t}$$ donc la charge $Q = \frac{k \cdot B \cdot I_0}{2a} \cdot e^{i\omega t}$

La solution correspondante au régime permanent sinusoïdal de l'équation (19) est

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = \frac{dQ}{dt}$$

En recherchant des solutions de la forme $q(t) = q_0 . e^{i(\omega t+\varphi)}$ et en reportant ces valeurs dans l'équation (19), on obtient

$$q_0 = k . \Delta P_M . \frac{\omega . \tau}{\sqrt{1 + \omega^2 . \tau^2}}$$

$$tg\,\varphi = \frac{1}{\omega . \tau}$$

avec

$$\Delta P_M = \frac{B . I_0}{2a}$$

Aux bornes du capteur, il apparaît la tension

$$(23) \qquad V_{(t)} = \frac{k . \Delta P_M}{(C_0 + C)} . \frac{\omega . \tau}{\sqrt{1 + \omega^2 . \tau^2}} . e^{i(\omega t+\varphi)}$$

L'amplitude du signal obtenu est donc

$$(24) \qquad V_M = \frac{k . \Delta P_M}{(C_0 + C)} . \frac{\omega . \tau}{\sqrt{1+\omega^2 . \tau^2}}$$

8.3. - Dispositif expérimental

8.3.1. - Le capteur piézoélectrique

C'est un capteur piézoélectrique au Titanate de Baryum. La pastille piézoélectrique est un cylindre dont la section est un cercle de 3 mm de diamètre. Le support est en inox.

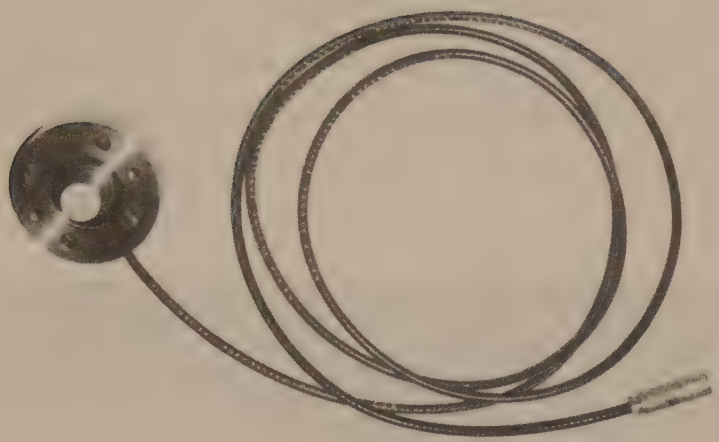


Figure 7

8.3.2. - La mesure de la pression statique

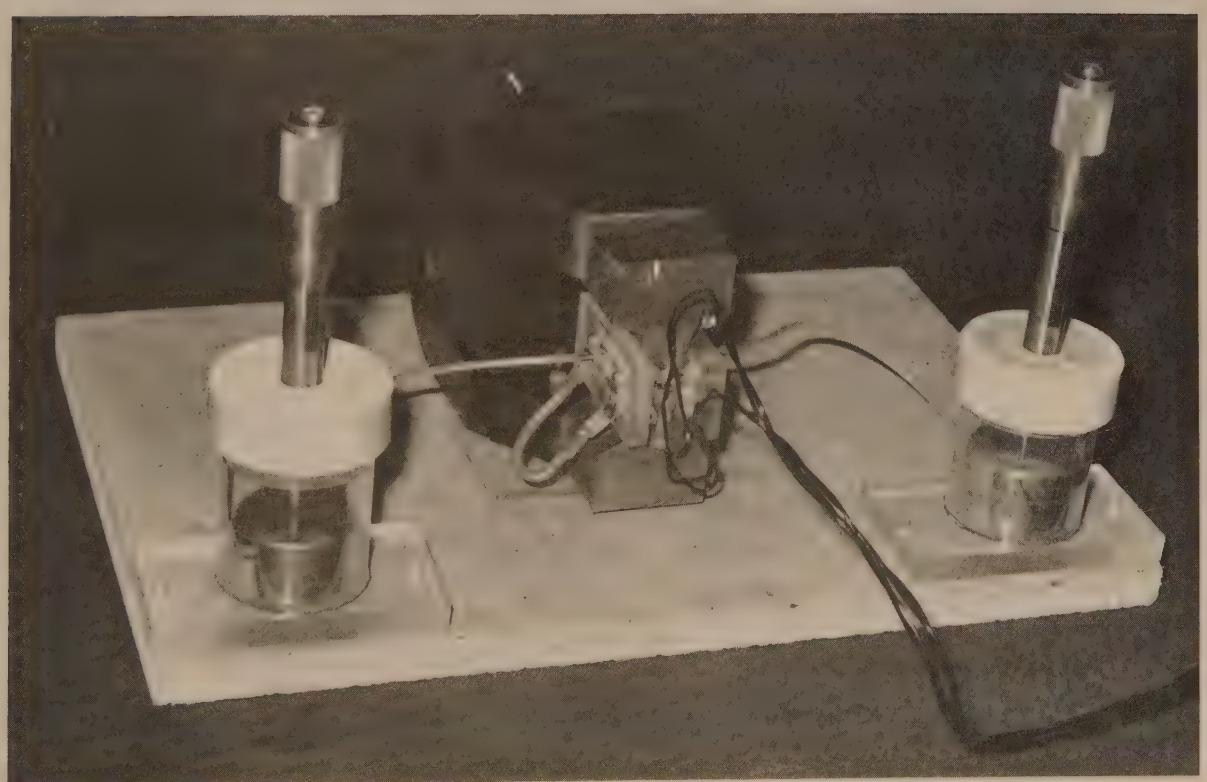


Figure 8

La pression statique (ΔP) est mesurée par l'intermédiaire de prise de pression aboutissant à un puits de mesure (figure 8).

8.3.3. - La pompe électromagnétique

La figure 9 représente l'ensemble du matériel utilisé dont la pompe électromagnétique. Sa dimension caractéristique est a = 2 mm ; ses parois sont en plexiglass d'épaisseur 8 mm. Le fluide électroconducteur utilisé est le mercure. Le champ d'induction créé par un aimant permanent est de 0,21 Tesla.

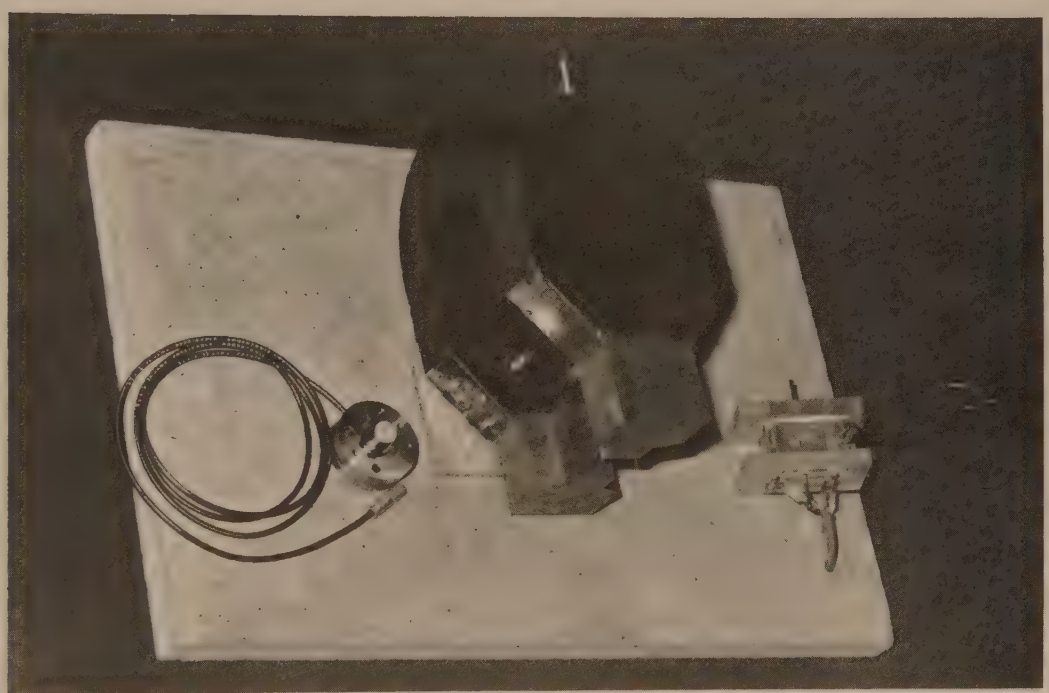


Figure 9

8.4. - Résultats expérimentaux, étalonnage du capteur et détermination de la constante k

Pour le régime transitoire d'abord, et pour $\tau = \tau^*$ ensuite, on a

$$(25) \quad V_{(t)} = \frac{k \cdot \Delta P_0}{\tau(c_0+c)} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec : $\Delta P_o = \frac{B \cdot I_o}{2a}$

pour $t = \tau$, cette fonction passe par un maximum qui est

(26) $V_M = \frac{k \cdot \Delta P_o}{(C_o + C) \cdot e}$

Il faut à partir de cette relation, chercher à déterminer k.

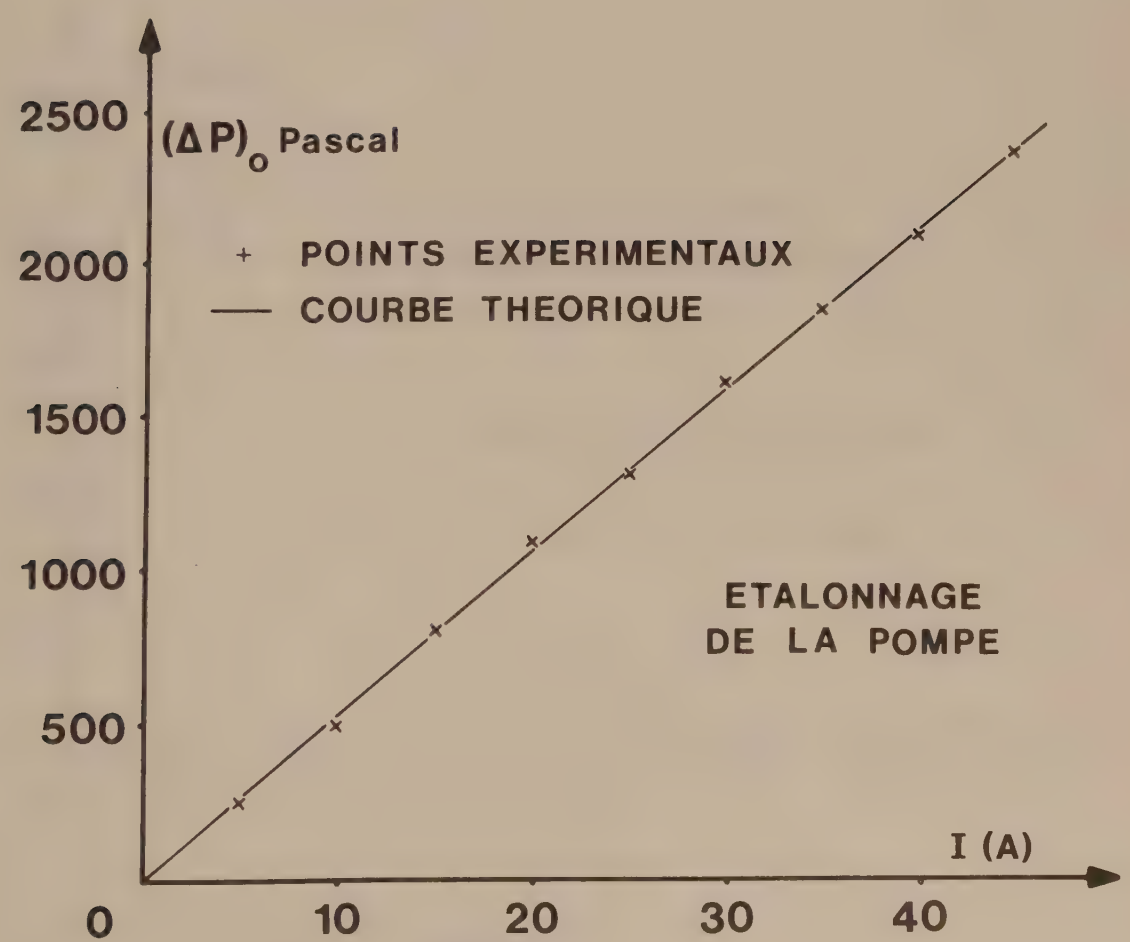


Figure 10

Les capacités Co et C sont mesurées au pont à impédance, ainsi que R, on connait donc τ .

Nos conditions d'expériences correspondent en particulier a : Co = 187 p F, C = 185 p F, R = 1 M Ω , τ = 0,372 ms.

La quantité (ΔP) est calculée, puis mesurée, ces résultats sont confrontés sur la figure 10. On constate la bonne linéarité de la réponse du système.

Pour résoudre complètement la problème, il reste à mesurer le maximum Vm de la tension $V(t)$. Le signal $V(t)$ est photographié sur l'écran d'un oscillographe cathodique (figures 11 et 12).

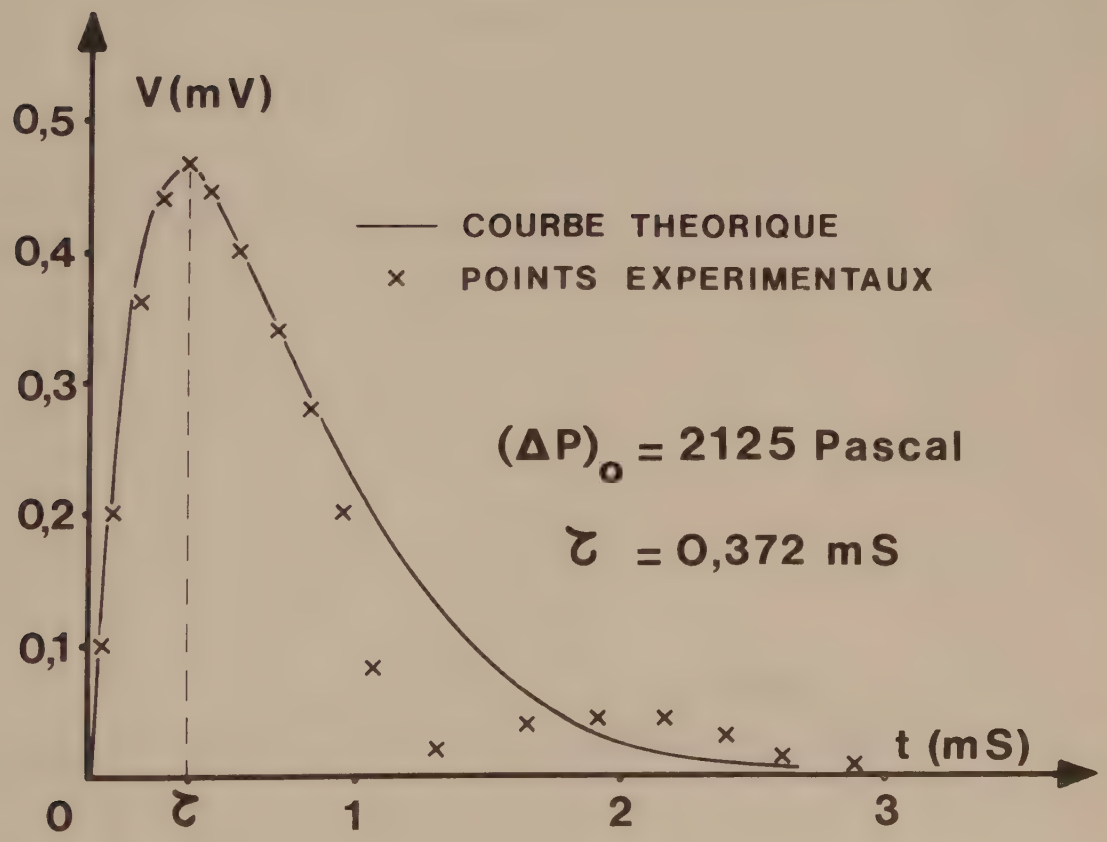


Figure 11

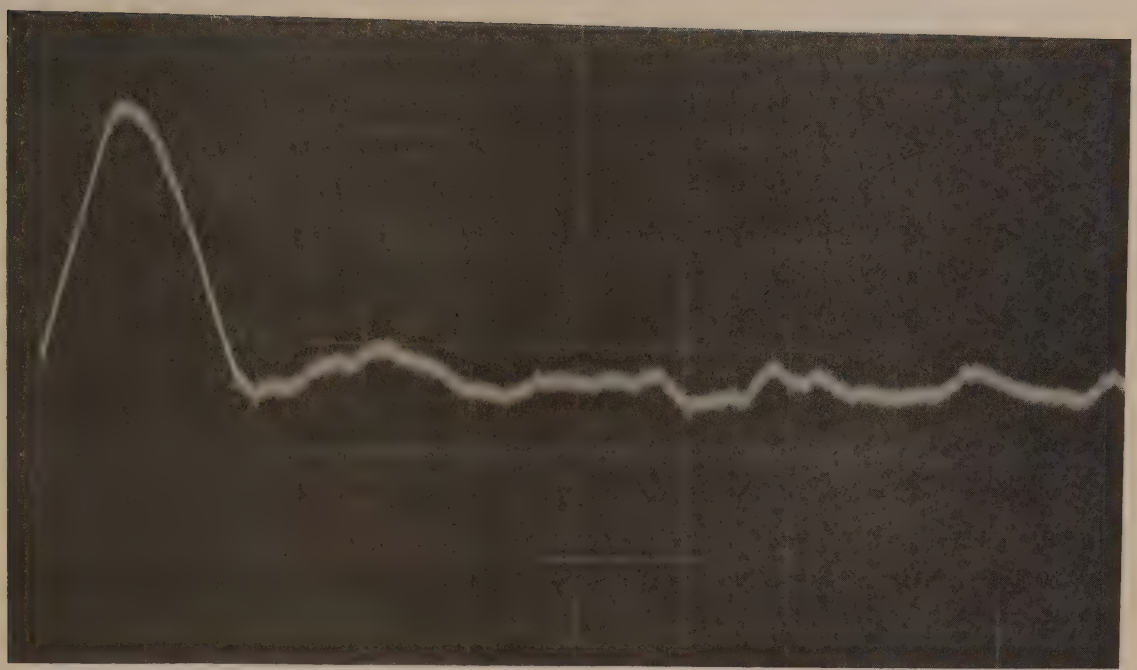


Figure 12

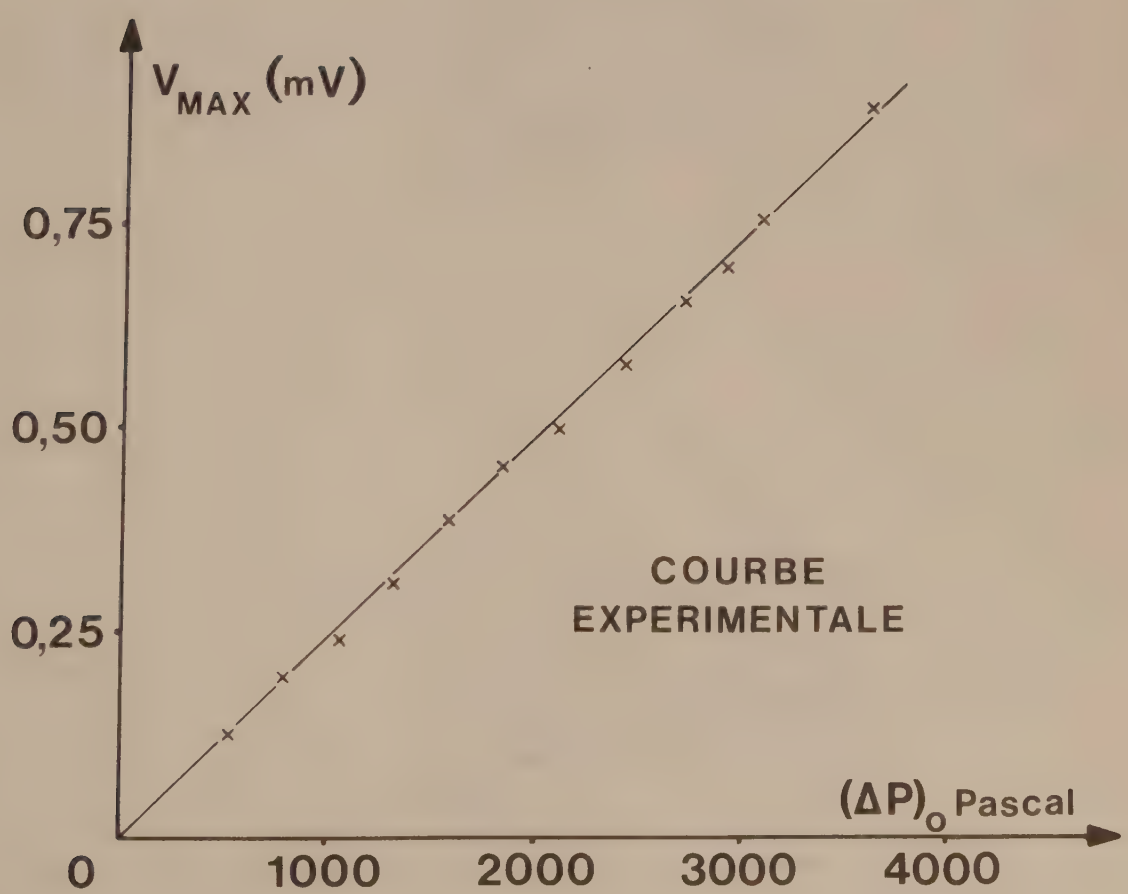


Figure 13

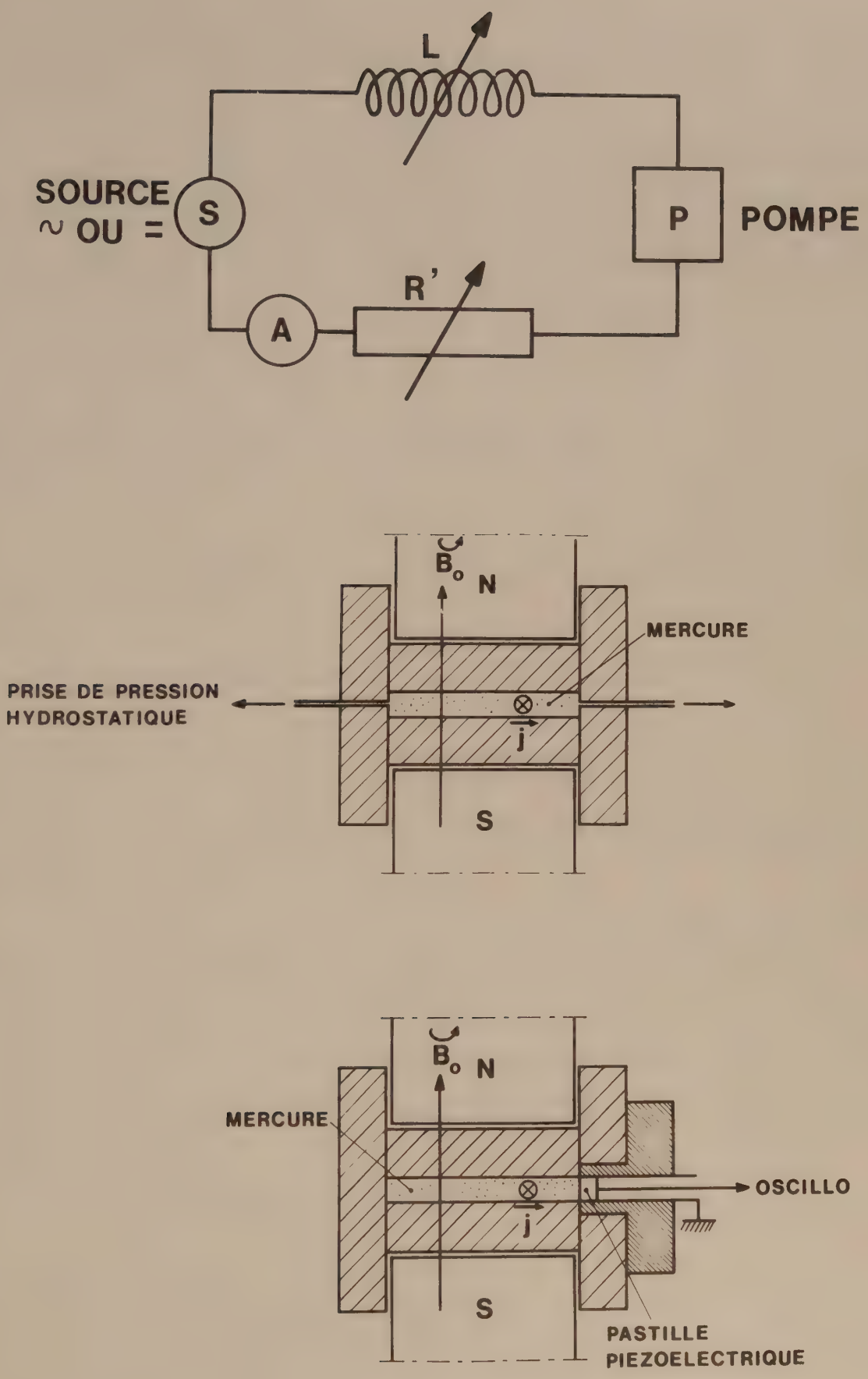

L
SOURCE
≈ OU =
S
P
POMPE
R'
A
B₀
N
MERCURE
PRISE DE PRESSION
HYDROSTATIQUE
j
S
B₀
N
MERCURE
OSCILLO
j
S
PASTILLE
PIEZOELECTRIQUE

Figure 14

L'enregistrement (figure 12) est confronté avec la valeur théorique $V_{(t)}$, dans la figure 11.

Afin de vérifier ici la linéarité de la réponse du capteur la figure 10 représente les variations de la pression en fonction de l'intensité.

La figure 14 montre les deux types de mesure effectués sur la pompe électromagnétique

- Mesure de (ΔP_0)
- Mesure de $V(t)$

En définitive, la formule (26) donne la valeur de k

$$k = \frac{V_M \cdot (C_0 + C) \cdot e}{\Delta P_0}$$

Numériquement, la valeur moyenne de k obtenue ici est

$$k = 2{,}24 \times 10^{-16} \qquad \text{M.K.S.A.}$$

Un étalonnage est également possible en alimentant la pompe électromagnétique en courant alternatif sinusoïdal.

Il faut des intensités de plusieurs dizaines d'ampères pour obtenir une pression convenable (figure 10). Seul le courant industriel de 50 Hz peut se prêter à une mesure avec une forte intensité mais sa fréquence est faible compte-tenu de la constante de temps τ de notre capteur piézoélectrique. On obtient dans ce cas la réponse du capteur représenté par la figure 15, la linéarité est toujours bonne.

On utilise donc la formule (27)

$$(27) \qquad V_M = \frac{k \cdot \Delta P_M}{(C_0 + C)} \cdot \frac{\omega \cdot \tau}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot \tau^2}}$$

La faiblesse du signal obtenu donne une grande incertitude aux basses pressions, mais on vérifie néanmoins la relation (27).

On obtient la valeur de k suivante

$$k = \frac{(C_0 + C).V_M.\sqrt{1+\omega^2.\tau^2}}{\omega.\tau.\Delta P_M}$$

C'est-à-dire numériquement

$$k = 2,32 \times 10^{-16} \quad M.K.S.A.$$

On retrouve sensiblement le même résultat qu'en adoptant la méthode d'étalonnage basée sur l'utilisation du régime transitoire.

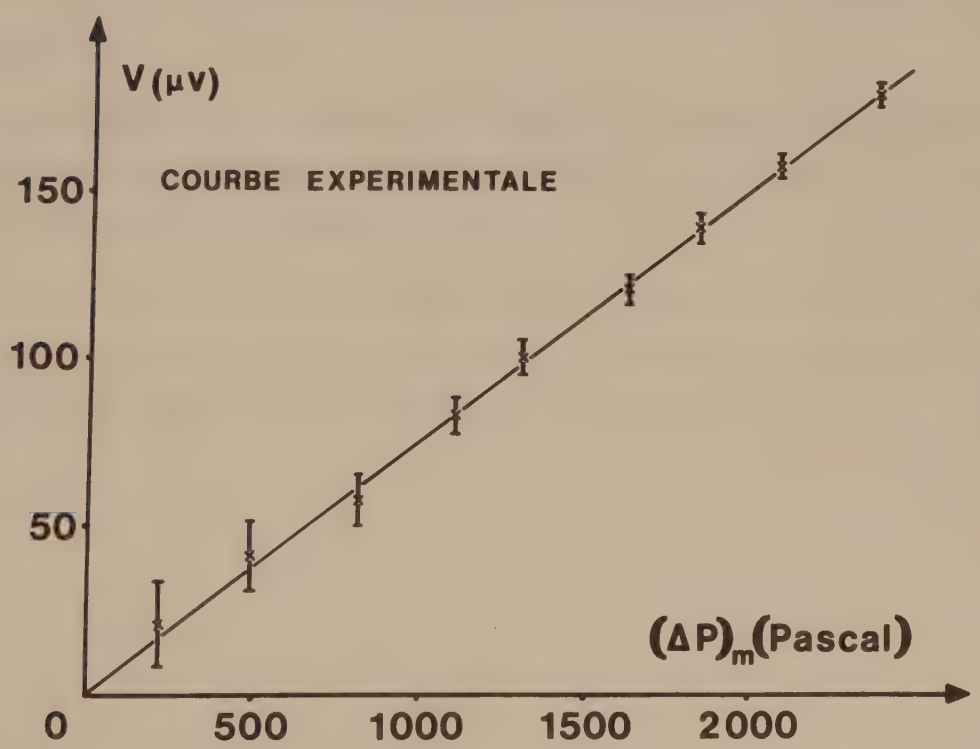


Figure 15

L'écart entre les constantes d'étalonnage, établies de deux manières différentes est de l'ordre de 3, 5 %, ce qui correspond à l'incertitude des mesures. La première méthode (régime impulsionnel) est plus précise que la seconde (régime sinusoïdal), du fait de son niveau de mesure plus élevé. La marge d'erreur obtenue sur la constante d'étalonnage est du même ordre de grandeur que la précision que l'on peut attendre de ce type de capteur.

9. CONCLUSION

On a établi dans ce chapitre la condition de l'équilibre indéfini d'un système magnétohydrostatique stationnaire ou instationnaire.

Le problème a été abordé dans le cas général puis pour quelques cas particuliers : induction à deux composantes constantes, densité de courant uniforme, systèmes bidimensionnels pour lesquels des conditions d'équilibres spécifiques ont été établies.

Les conditions permettant de considérer une analogie hydrodynamique de l'équilibre magnétohydrostatique ont été précisées et appliquées à titre d'exemple au phénomène de pincement linéaire.

L'utilisation pratique des principes de la magnétohydrostatique a permis également la mise au point d'un dispositif, facilement réalisable et destiné à l'étalonnage de capteurs de pression piézoélectriques.

CHAPITRE II

STABILITE DES EQUILIBRES MAGNETOHYDROSTATIQUES

La difficulté pour confiner un plasma entre des parois non matérielles montre l'importance des problèmes posés par la stabilité de l'équilibre magnétohydrostatique.

On recherche dans ce chapitre, une méthode permettant de déterminer la nature d'un équilibre magnétohydrostatique donné, pour cela, l'évolution d'une perturbation infinitésimale quelconque du système apporte les renseignements voulus.

La résolution mathématique des équations différentielles obtenues s'effectue après une linéarisation et une généralisation est possible dans certains cas, le cas particulier du champ d'induction uniforme est examiné et le problème des systèmes quasi équilibrés abordé.

1. ETUDE DE LA STABILITE MAGNETOHYDROSTATIQUE DES MILIEUX INCOMPRESSIBLES

1.1. - Cas des équilibres stationnaires

1.1.1. - Mise en équation

L'équilibre magnétohydrostatique d'un fluide incompressible est représenté par les équations adimensionnelles

1.1.2. - Méthode de résolution

1.1.2.1. - Méthode de la perturbation localisée

Dans le but de ramener les équations (1), (2), (3) à un système différentiel linéaire à coefficients constants, on effectue un développement de l'induction limité au premier ordre, au voisinage d'un point $M(x_{oi})$

$$(5) \qquad B_i(x_i) = B_i(x_{oi}) + A_{ij}.(x_j - x_{oj}) \qquad \text{avec} \qquad A_{ij} = \left(\frac{\partial B_i}{\partial x_j}\right)_{x_o}$$

Une telle représentation de l'induction n'est possible que dans le domaine de validité du développement limité, il faut donc restreindre cette méthode à des champs d'induction lentement variables dans l'espace.

En reportant l'expression (5) dans le système différentiel, et en négligeant les termes d'ordre supérieur à deux, on obtient

$$(6) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{1}{R_e}.\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + B_{oj}.\frac{\partial b_i}{\partial x_j} + A_{ij}.b_j$$

$$(7) \qquad \frac{\partial b_i}{\partial t} - \frac{1}{R_M}.\frac{\partial^2 b_i}{\partial x_j^2} = B_{oj}.\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - A_{ij}.u_j$$

$$(3) \qquad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

avec $\mathcal{P} = p + B_j.b_j$ et $B_{oi} = B_i(x_{oi})$

On recherche des solutions exponentielles de la forme :

$$u_i(x_i,t) = \sum_k u_{ki} \cdot e^{-i\omega t} \cdot e^{i k_j x_j}$$

$$b_i(x_i,t) = \sum_k b_{ki} \cdot e^{-i\omega t} \cdot e^{i k_j x_j}$$

$$\mathcal{P}(x_i,t) = \sum_k \mathcal{P}_k \cdot e^{-i\omega t} \cdot e^{i k_j x_j}$$

Les coefficients ω et k_i sont en général des nombres complexes à déterminer ; le symbole $\sum$ est pris au sens large, les fonctions peuvent donc devenir des intégrales de Fourier si les valeurs de k_i sont réelles. En reportant les solutions dans le système différentiel (6), (7), (3), on a, pour chacune des composantes :

$$(8) \qquad -i\omega . u_{ki} + \frac{k^2}{Re} . u_{ki} = -ik_i . \mathcal{P}_k + (i . B_{oj} . k_j) . b_{ki} + A_{ij} . b_{kj}$$

$$(9) \qquad -i\omega . b_{ki} + \frac{k^2}{R_M} . b_{ki} = (i . B_{oj} . k_j) . u_{ki} - A_{ij} . u_{kj}$$

$$(10) \qquad i k_j . u_j = 0$$

Sous forme matricielle, on obtient :

$$M_1 * \text{Colonne}\left[u_{k1}, u_{k2}, u_{k3}, b_{k1}, b_{k2}, b_{k3}, \mathcal{P}_k\right] = 0$$

Ce système algébrique admet d'autres solutions que la solution zéro si le déterminant Δ de sa matrice est nul, soit :

$$(11) \qquad \Delta = \text{Det}(M_1) = 0$$

$$
M_1 = \begin{bmatrix}
\left(\frac{k_j^2}{R_e} - i\omega\right) & 0 & 0 & -\left(iB_{oj}k_j + A_{11}\right) & -A_{21} & -A_{31} & ik_1 \\
0 & \left(\frac{k_j^2}{R_e} - i\omega\right) & 0 & -A_{12} & -\left(iB_{oj}k_j + A_{22}\right) & -A_{32} & ik_2 \\
0 & 0 & \left(\frac{k_j^2}{R_e} - i\omega\right) & -A_{13} & -A_{23} & -\left(iB_{oj}k_j + A_{33}\right) & ik_3 \\
\left(A_{11} - iB_{oj}k_j\right) & A_{21} & A_{31} & \left(\frac{k_j^2}{R_M} - i\omega\right) & 0 & 0 & 0 \\
A_{12} & \left(A_{22} - iB_{oj}k_j\right) & A_{32} & 0 & \left(\frac{k_j^2}{R_M} - i\omega\right) & 0 & 0 \\
A_{13} & A_{23} & \left(A_{33} - iB_{oj}k_j\right) & 0 & 0 & \left(\frac{k_j^2}{R_M} - i\omega\right) & 0 \\
ik_1 & ik_2 & ik_3 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

Matrice M_1

1.1.2.2. - Forme des solutions locales - Etude de la stabilité

Le déterminant (11) associé au système différentiel (3), (6), (7) s'écrit :

$$\Delta = f(k_i) \cdot \prod_{n=1}^{6} \left[\omega - \omega_n(k_i) \right] = 0$$

qui s'annule pour :

$$f(k_i) = 0$$

$$\omega = \omega_n(k_i) \qquad \text{pour} \qquad n = 1 \text{ à } 6$$

Dans le premier cas, il existe une relation entre les composantes du vecteur k_i :

$$f(k_i) = 0 \qquad\qquad k_1 = \varphi(k_2, k_3)$$

Dans ces conditions, ω, que nous notons ici Ω, est arbitraire.

La seconde possibilité correspond à une relation de dispersion, les solutions correspondantes sont ondulatoires et le vecteur k_i peut prendre à priori toutes les valeurs possibles.

Les solutions du système (3), (6), (7) sont donc :

$$u_i = \sum_{k} \left[\sum_{n=1}^{6} u_{kin} \cdot e^{-i\omega_n t} \cdot e^{ik_j x_j} \right] + \sum_{\Omega} \sum_{k}^{*} u_{k\Omega i} \cdot e^{-i\Omega t} \cdot e^{ik_j x_j}$$

$$b_i = \sum_{k} \left[\sum_{n=1}^{6} b_{kin} \cdot e^{-i\omega_n t} \cdot e^{ik_j x_j} \right] + \sum_{\Omega} \sum_{k}^{*} b_{k\Omega i} \cdot e^{-i\Omega t} \cdot e^{ik_j x_j}$$

* Les composantes du vecteur k_i satisfont à la relation $f(k_i) = 0$

$$\mathcal{P} = \sum_{k} \left[\sum_{n=1}^{6} \mathcal{P}_{kn} \cdot e^{-i\omega_n t} \cdot e^{ik_j x_j} \right] + \sum_{\Omega} \sum_{k}^{*} \mathcal{P}_{\Omega} \cdot e^{-i\Omega t} \cdot e^{ik_j x_j}$$

On remarque que les solutions ayant une forme exponentielle, l'équation (4) joue toujours le rôle de condition initiale, en effet compte tenu des expressions ci-dessus, on a :

$\frac{\partial b_j}{\partial x_j} = 0$ pour $t = 0$ entraîne $\frac{\partial b_j}{\partial x_j} = 0$ pour tout t

Le système différentiel se ramène donc aux équations (3), (6), (7).

Les zéros du déterminant Δ font apparaitrent deux classes de solutions de structure différente.

Une solution correspond à un phénomène ondulatoire de la forme :

$$\sum_{k} \sum_{n=1}^{6} X_{kin} \cdot e^{-i\omega_n t} \cdot e^{ik_j x_j}$$

La vitesse de phase est :

$$V_{\varphi_i} = \frac{Im[i\omega]}{k_j^2} \cdot k_i \qquad \text{avec } k_i \text{ réel.}$$

Ce sont des ondes de Alfven qui se propagent le long des lignes de force.

Les autres solutions sont de la forme :

$$\sum_{\Omega} \sum_{k}^{*} X_{\Omega i} \cdot e^{-i\Omega t} \cdot e^{ik_j x_j}$$

Elles correspondent au mouvement hydrodynamique proprement dit, qui vient se superposer au phénomène ondulatoire de Alfven.

Les fonctions X_{kin} et $X_{\Omega i}$, ainsi que Ω , sont déterminées par les conditions aux limites.

Sauf, pour des inductions lentement variables dans l'espace, nous devons de plus limiter cette méthode à des longueurs d'onde de l'ordre de grandeur du domaine de validité du développement limité ; dans ces conditions, on peut en déduire un critère de stabilité qui s'étudie en fonction du signe de la partie réelle de $(-i\omega)$ ou de $(-i\Omega)$

$$Re(-i\omega \text{ et } -i\Omega) < 0$$

La perturbation s'amortissant exponentiellement en fonction du temps, le système magnétohydrostatique correspondant est donc stable.

$$Re(-i\omega \text{ et } -i\Omega) = 0$$

L'équilibre est indifférent.

$$Re(-i\omega \text{ ou } -i\Omega) > 0$$

L'une des deux solutions, au moins, augmente exponentiellement en fonction du temps, l'équilibre correspondant est donc instable.

Remarque : En calculant la divergence de l'équation (6) , on a :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial x_j^2} = A_{ej} \cdot \frac{\partial b_j}{\partial x_e}$$

La transformée de Fourier de cette expression donne :

$$-k_j^2 \cdot \mathcal{P}_k = A_{ej} \cdot (i k_j \cdot b_{kj})$$

En remplaçant $\mathcal{P}_k$ par sa valeur dans le système différentiel précédent, sous forme matricielle, on peut écrire :

$$M_2 * \text{Colonne}[u_{1k}, u_{2k}, u_{3k}, b_{1k}, b_{2k}, b_{3k}] = 0$$

Les valeurs de $i\omega$ apparaissent comme les valeurs propres de la matrice du système linéaire.

1.1.2.3. - Méthode de la représentation paramétrique

L'étude d'une perturbation localisée ne convenant qu'à certains cas particuliers, une méthode de résolution plus générale du système différentiel (1), (2), (3) est donc souhaitable. Une possibilité consiste à rechercher une relation entre les solutions locales $(u_i^*, b_i^*, \mathcal{P}^*)$ et générales $(u_i, b_i, \mathcal{P})$ et on se ramène à la résolution des systèmes différentiels suivants :

$$(1) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{1}{R_e} \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} - B_j \cdot \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \cdot \frac{\partial B_i}{\partial x_j} = 0$$

$$(2) \qquad \frac{\partial b_i}{\partial t} - \frac{1}{R_M} \cdot \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_j^2} - B_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \cdot \frac{\partial B_i}{\partial x_j} = 0$$

$$(3) \qquad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

et

$$(6) \qquad \frac{\partial u_i^*}{\partial t} - \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^2} + \frac{\partial \mathcal{P}^*}{\partial x_i} - B_{oj} \cdot \frac{\partial b_i^*}{\partial x_j} - A_{ij} \cdot b_j^* = 0$$

$$
M_2 = \begin{bmatrix}
\left(\frac{k_j^2}{Re} - i\omega\right) & 0 & 0 & \frac{ik_1(ik_j.A_{j1})}{k_j^2} & \frac{ik_1(ik_jA_{j2})}{k_j^2} & \frac{ik_1(ik_jA_{j3})}{k_j^2} \\
 & & & -(iB_{oj}k_i + A_{11}) & -A_{21} & -A_{31} \\
0 & \left(\frac{k_j^2}{Re} - i\omega\right) & 0 & \frac{ik_2(ik_j.A_{j1})}{k_j^2} & \frac{ik_2(ik_jA_{j2})}{k_j^2} & \frac{ik_2(ik_jA_{j3})}{k_j^2} \\
 & & & -A_{12} & -(iB_{oj}k_j + A_{22}) & -A_{32} \\
0 & 0 & \left(\frac{k_j^2}{Re} - i\omega\right) & \frac{ik_3(ik_jA_{j1})}{k_j^2} & \frac{ik_3(ik_jA_{j2})}{k_j^2} & \frac{ik_3(ik_j.A_{j3})}{k_j^2} \\
 & & & -A_{13} & -A_{23} & -(iB_{oj}k_j + A_{33}) \\
(A_{11} - iB_{oj}k_j) & A_{21} & A_{31} & \left(\frac{k_j^2}{R_M} - i\omega\right) & 0 & 0 \\
A_{12} & (A_{22} - iB_{oj}k_j) & A_{32} & 0 & \left(\frac{k_j^2}{R_M} - i\omega\right) & 0 \\
A_{13} & A_{23} & (A_{33} - iB_{oj}k_j) & 0 & 0 & \left(\frac{k_j^2}{R_M} - i\omega\right)
\end{bmatrix}
$$

Matrice M_2

$$(7)\qquad \frac{\partial b_i^*}{\partial t} - \frac{1}{K_M}\cdot\frac{\partial^2 b_i^*}{\partial x_j^2} - B_{oj}\cdot\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + A_{ij}\cdot u_j^* = 0$$

$$(3)\qquad \frac{\partial u_j^*}{\partial x_j} = 0$$

Soit $\mathcal{L}$ l'opérateur différentiel à coefficients non constants qui, appliqué au vecteur $(u_i, b_i, \mathcal{P})$ donne les équations (1), (2), (3) et $\mathcal{L}^*$, à coefficients constants, pour le second système, on peut alors écrire :

$$(12)\qquad \mathcal{L}\begin{bmatrix} u_i \\ b_i \\ \mathcal{P} \end{bmatrix} = 0$$

$$(13)\qquad \mathcal{L}^*\begin{bmatrix} u_i^* \\ b_i^* \\ \mathcal{P}^* \end{bmatrix} = 0$$

En utilisant la linéarité de ces systèmes et en retranchant $\mathcal{L}^*$ de $\mathcal{L}$ il vient :

$$(14)\qquad \mathcal{L}^*\begin{bmatrix} u_i - u_i^* \\ b_i - b_i^* \\ \mathcal{P} - \mathcal{P}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (B_j - B_{oj})\cdot\dfrac{\partial b_i}{\partial x_j} + b_j\cdot\left(\dfrac{\partial B_i}{\partial x_j} - A_{ij}\right) \\ (B_j - B_{oj})\cdot\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_j\cdot\left(\dfrac{\partial B_i}{\partial x_j} - A_{ij}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(13)\qquad \mathcal{L}^*\begin{bmatrix} u_i^* \\ b_i^* \\ \mathcal{P}^* \end{bmatrix} = 0$$

Il apparaît au premier membre, dans les deux systèmes, l'opérateur différentiel linéaire à coefficients constants $\mathcal{L}^*$, la solution sans second membre a la forme exponentielle de la perturbation localisée déjà connue.

Effectuons une représentation paramétrique du système (14) en introduisant le vecteur (V_i , W_i , 0) tel que :

$$(B_j - B_{0j}) \cdot \frac{\partial B_i}{\partial x_j} + b_j \cdot \left(\frac{\partial B_i}{\partial x_j} - A_{ij} \right) = V_i(x_i, t) \quad \text{(a)}$$

(15)

$$(B_j - B_{0j}) \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_j \cdot \left(\frac{\partial B_i}{\partial x_j} - A_{ij} \right) = W_i(x_i, t) \quad \text{(b)}$$

avec $\dfrac{\partial b_j}{\partial x_j} = 0$ et $\dfrac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$

et

(16)
$$\mathcal{L} \begin{bmatrix} u_i - u_i^* \\ b_i - b_i^* \\ \mathcal{P} - \mathcal{P}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_i(x_i, t) \\ W_i(x_i, t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur (V_i , W_i , 0) joue le rôle de variable auxiliaire ; on peut alors rechercher la solution des équations 15(a) qui représentent un système différentiel linéaire de premier ordre, soit :

$$(15(a))\quad (B_j - B_{oj}) \cdot \frac{\partial b_i}{\partial x_j} + b_j \cdot \left(\frac{\partial B_i}{\partial x_j} - A_{ij} \right) = V_i(x_i, t)$$

On recherche la solution $b_i(x_i, t)$ sous forme implicite :

$$\phi_k (x_i, b_i) = C_k \qquad (C_k \text{ constant})$$

L'induction $b_i(x_i, t)$ est donnée comme solution de l'équation (15 (a)), où ϕ_k est un champ vectoriel dépendant de x_i et de b_i. En supposant le déterminant fonctionnel de la forme implicite différent de zéro, on peut écrire :

$$\frac{d\phi_k}{dx_i} = \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi_k}{\partial b_j} \cdot \frac{\partial b_j}{\partial x_i} = 0$$

En multipliant par $(B_i - B_{oi})$ et en sommant sur i :

$$(B_j - B_{oj}) \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi_k}{\partial b_l} (B_j - B_{oj}) \cdot \frac{\partial b_l}{\partial x_j} = 0$$

et en tenant compte de 15 (a) :

$$(B_j - B_{oj}) \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} + \left[V_i(x_i, t) - b_j \left(\frac{\partial B_i}{\partial x_j} - A_{ij} \right) \right] \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial b_j} = 0$$

Le système 15 (a) se réduit donc à une équation différentielle linéaire à une inconnue, ϕ_k , fonction de six variables (x_i , b_i). La méthode des caractéristiques permet d'écrire :

$$(17) \qquad \frac{dx_i}{B_i - B_{0i}} = d\lambda \qquad \text{et} \qquad \frac{d\phi_k}{d\lambda} = 0$$

$$(18) \qquad \frac{db_i}{V_i(x_i,t) - b_j\left(\frac{\partial B_i}{\partial x_j} - A_{ij}\right)} = d\lambda$$

Cette méthode présente une analogie avec celle employée pour la résolution des équations de la magnétohydrostatique, en supposant connue une condition initiale, on a :

$$x_i = x_i(\lambda, \alpha_k)$$

$$b_i = b_i(\lambda, \alpha_k)$$

$$\phi_k = C_k$$

Si le déterminant fonctionnel de la représentation paramétrique s est différent de zéro, on en déduit :

$$b_i = b_i(x_i, V_i) \qquad \text{avec} \quad \frac{\partial b_j}{\partial x_j} = 0$$

Une méthode analogue pour l'équation (15 (b)) donne :

$$\frac{dx_i}{B_i - B_{oi}} = d\lambda \qquad \text{et} \qquad \frac{d\Phi_k}{d\lambda} = 0$$

$$\frac{du_i}{W_i(x_i,t) + u_j\left(\frac{\partial B_i}{\partial x_j} - A_{ij}\right)} = d\lambda$$

Donc :

$$u_i = u_i(x_i, W_i) \qquad \text{avec} \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

En définitive , la résolution du système (15) conduit à :

$$b_i = b_i(x_i, V_i) \qquad \frac{\partial b_j}{\partial x_j} = 0$$

avec

$$u_i = u_i(x_i, W_i) \qquad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

Le système (13) a pour solution :

$$\begin{bmatrix} u_i^* \\ b_i^* \\ \mathcal{P}^* \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} u_{ki}^* \\ b_{ki}^* \\ \mathcal{P}_k^* \end{bmatrix} \cdot e^{-i\omega(k_i)\cdot t} \cdot e^{ik_j x_j}$$

De (16), on obtient :

$$\begin{bmatrix} u_i - u_i^* \\ b_i - b_i^* \\ \mathcal{P} - \mathcal{P}^* \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} u_{ki} - u_{ki}^* \\ b_{ki} - b_{ki}^* \\ \mathcal{P}_k - \mathcal{P}_k^* \end{bmatrix} \cdot e^{-i\omega(k_i)\cdot t} \cdot e^{ik_j x_j} + \begin{bmatrix} u_s \\ b_s \\ \mathcal{P}_s \end{bmatrix} (V_i, W_i)$$

où $\begin{bmatrix} u_s \\ b_s \\ \mathcal{P}_s \end{bmatrix} (V_i, W_i)$

représente une solution particulière avec second membre du système (16).

En résumant les résultats connus, on a :

$$b_i = b_i\,(x_i, V_i)$$

$$u_i = u_i\,(x_i, W_i)$$

$$\begin{bmatrix} u_i^* \\ b_i^* \\ \mathcal{P}^* \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} u_{ki}^* \\ b_{ki}^* \\ \mathcal{P}_k^* \end{bmatrix} \cdot e^{-i\omega(k_i)\cdot t} \cdot e^{ik_j x_j}$$

$$\begin{bmatrix} u_i - u_i^* \\ b_i - b_i^* \\ \mathcal{P} - \mathcal{P}^* \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} u_{ki} - u_{ki}^* \\ b_{ki} - b_{ki}^* \\ \mathcal{P}_k - \mathcal{P}_k^* \end{bmatrix} \cdot e^{-i\omega(k_i)t} \cdot e^{ik_j x_j} + \begin{bmatrix} u_s \\ b_s \\ \mathcal{P}_s \end{bmatrix} (V_i, W_i)$$

La connaissance des solutions locales permet de traiter le problème général. On obtient ainsi une représentation paramétrique des solutions en fonction des composantes du vecteur $(V_i, W_i, 0)$ qui peut être décomposé en série de Fourier, soit :

$$V_i(x_i, t) = \sum_{k'\omega'} V_{ik'\omega'} \cdot e^{-i\omega' t} \cdot e^{ik'_j x_j}$$

$$W_i(x_i, t) = \sum_{k',\omega'} W_{ik'\omega'} \cdot e^{-i\omega' t} \cdot e^{ik'_j x_j}$$

La linéarité de toutes les équations utilisées permet d'appliquer la méthode de la représentation paramétrique à chacune des composantes de Fourier du vecteur $(V_i, W_i, 0)$.

1.1.3. - Aspect énergétique du Problème.

1.1.3.1. - Calcul de l'énergie : Reprenons le système différentiel relatif aux petits mouvements, il est linéaire à coefficients non constants :

$$(1) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + B_j \cdot \frac{\partial b_i}{\partial x_j} + b_j \cdot \frac{\partial B_i}{\partial x_j}$$

$$(2) \qquad \frac{\partial b_i}{\partial t} - \frac{1}{R_M} \cdot \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_j^2} = B_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_j \cdot \frac{\partial B_i}{\partial x_j}$$

$$(3) \qquad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

Multiplions les équations (1) par u_i et (2) par b_i , en les ajoutant, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{u_j^2 + b_j^2}{2}\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{u_j^2 + b_j^2}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{R_e} \cdot u_i \cdot \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{R_M} \cdot b_i \cdot \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_j^2} - u_i \cdot \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + u_i \cdot \left(B_j \cdot \frac{\partial b_i}{\partial x_j}\right)$$

$$+ \left(B_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \cdot b_i + \left(\varepsilon_{ijk} \cdot u_k \cdot b_j\right) \cdot \left(\varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial B_k}{\partial x_j}\right)$$

Les différents termes de cette équation ont les significations physiques suivantes :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{u_j^2 + b_j^2}{2}\right]$$

variation de densité d'énergie cinétique et magnétique par unité de temps.

$$\frac{1}{R_e} \cdot u_i \cdot \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{R_e}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j \cdot \tau_{ij}\right) - \tau_{ij} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]$$

dissipation énergétique due aux tensions visqueuses

$$\frac{1}{R_M} \cdot b_i \cdot \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_j^2}$$

ou

$$\frac{1}{R_M} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varepsilon_{ijk} \cdot b_k \cdot \left(\varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial b_k}{\partial x_j}\right)\right) - \left(\varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial b_k}{\partial x_j}\right)^2\right]$$

$$\frac{1}{R_M} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varepsilon_{ijk} \cdot b_k \cdot \left(\varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial b_k}{\partial x_j} \right) \right) - j_i^2 \right]$$

puissance magnétique dissipée.

j_i étant le vecteur densité de courant.

$$- u_i \cdot \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_i \cdot \mathcal{P} \right)$$

puissance des forces de pression en tenant compte de (3)

$$u_i \cdot \left(B_j \cdot \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \right) + b_i \cdot \left(B_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

$$= B_j \cdot \left[u_i \cdot \frac{\partial b_i}{\partial x_j} + b_i \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = B_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i \cdot b_i \right)$$

Avec (4), il vient : $\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(u_i \cdot b_i \right) \cdot B_j \right]$

qui est la puissance d'interaction de u_i et B_i.

$$\left(\varepsilon_{ijk} \cdot u_k \cdot b_i \right) \cdot \left(\varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial B_k}{\partial x_j} \right)$$

correspond à l'interaction de la densité de courant principale extérieure avec le champ magnétique induit b_i.

En définitive,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{u_j^2 + b_j^2}{2}\right] =$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{1}{Re}\cdot \tau_{ij}\cdot u_j + \frac{1}{R_M}\cdot \varepsilon_{ijk}\cdot b_k\cdot\left(\varepsilon_{ijk}\cdot\frac{\partial b_k}{\partial x_j}\right) + B_j\cdot(u_j\cdot b_j) + u_j\cdot\mathcal{P}\right]$$

$$-\frac{1}{2Re}\cdot\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2 - \frac{j_j^2}{R_M} + \left(\varepsilon_{ijk}\cdot u_k\cdot b_j\right)\cdot\left(\varepsilon_{ijk}\cdot\frac{\partial B_k}{\partial x_j}\right)$$

La variation d'énergie totale du système par unité de temps peut se mettre en grande partie sous forme d'une divergence, à partir du théorème d'Ostrogradski, on calcule la puissance dans un volume (V) suffisamment grand pour que les grandeurs perturbées (u_i , b_i) soient nulles sur la frontière extérieure, il vient alors :

$$\frac{d}{dt}\int_{(V)}\frac{u_j^2 + b_j^2}{2}\cdot dV = \frac{d}{dt}\left\langle\frac{u_j^2 + b_j^2}{2}\right\rangle$$

$$\oiint\left[\frac{1}{Re}\cdot\tau_{ij}\cdot u_j + \frac{1}{R_M}\cdot\varepsilon_{ijk}\cdot b_k\left(\varepsilon_{ijk}\cdot\frac{\partial b_k}{\partial x_j}\right) + B_j\cdot(u_j\cdot b_j) + u_j\cdot\mathcal{P}\right]\cdot n_j\cdot d\sigma$$

$$-\left\langle\frac{1}{2Re}\cdot\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{j_j^2}{R_M}\right\rangle + \left\langle\varepsilon_{ijk}\cdot u_k\cdot b_i\cdot\left(\varepsilon_{ijk}\cdot\frac{\partial B_k}{\partial x_j}\right)\right\rangle$$

L'intégrale de surface est nulle par hypothèse, il reste alors :

$$\frac{d}{dt}\left\langle\frac{u_j^2 + b_j^2}{2}\right\rangle =$$

$$-\left\langle \frac{1}{2Re}\cdot\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2+\frac{j_i^2}{R_M}\right\rangle+\left\langle \varepsilon_{ijk}.u_k.b_i.\left(\varepsilon_{ijk}.\frac{\partial B_k}{\partial x_j}\right)\right\rangle$$

1.1.3.2. - Remarque

Sans densité de courant extérieure, $\varepsilon_{ijk}.\frac{\partial B_k}{\partial x_j}=0$ ou, en système linéarisé : $A_{ij}=A_{ji}$, il reste :

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{u_i^2+b_i^2}{2}\right\rangle=-\left\langle \frac{1}{2Re}\cdot\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2+\frac{1}{R_M}.j_i^2\right\rangle$$

La dérivée par rapport au temps de la densité d'énergie est négative. Elle diminue constamment, donc tout système magnétohydrostatique, en l'absence de densité de courant d'origine extérieure, est un système stable.

Le second terme représente l'apport d'énergie d'origine extérieure, il correspond à l'interaction entre la densité de courant principale J_i et le champ magnétique induit dans le mouvement, en conclusion s'il y a instabilités, elles ne pourront provenir que de cette expression.

La nature de l'équilibre dépend du signe de :

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{u_i^2+b_i^2}{2}\right\rangle=\frac{dW}{dt}$$

pour $\frac{dW}{dt}<0$ l'équilibre est stable.

pour $\frac{dW}{dt}=0$ l'équilibre est indifférent.

pour $\frac{dW}{dt}>0$ l'équilibre est instable.

Nous remarquons ici que les termes dissipatifs tendent à s'opposer aux instabilités qui en dépendront donc.

1.1.3.3. - L'opérateur $b_j.\frac{\partial B_i}{\partial x_j}$ ou $u_j.\frac{\partial B_i}{\partial x_j}$

Les quantités $b_j.\frac{\partial B_i}{\partial x_j}$ et $u_j.\frac{\partial B_i}{\partial x_j}$ interviennent respective-

ment dans les équations du mouvement et de transport magnétique.

Sous forme matricielle, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial x_1} & \frac{\partial B_1}{\partial x_2} & \frac{\partial B_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial B_2}{\partial x_1} & \frac{\partial B_2}{\partial x_2} & \frac{\partial B_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial B_3}{\partial x_1} & \frac{\partial B_3}{\partial x_2} & \frac{\partial B_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

L'opérateur linéaire appliqué sur les vecteurs u_i et b_i a pour déterminant le Jacobien de l'induction imposée, par rapport à l'espace. Le paragraphe précédent montre que ce terme est à l'origine des instabilités électromagnétiques.

L'équation de continuité de l'induction indique que la matrice de transformation des vecteurs u_i ou b_i a une trace nulle, en effet :

$$TR\left[\frac{DB_i}{Dx_j}\right] = \frac{\partial B_j}{\partial x_j} = 0$$

et ceci, quelle que soit l'origine de l'induction.

On peut également donner une condition suffisante de stabilité d'un milieu magnétohydrostatique. Si la matrice de cette transformation linéaire est symétrique par rapport à sa diagonale principale, il vient :

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{u_j^2 + b_j^2}{2} \right\rangle = -\left\langle \frac{1}{2R_e} \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{R_m} \cdot j_j^2 \right\rangle$$

L'énergie du système est constamment dégradée, nous pouvons dire qu'il est stable.

Théorème : Si la matrice du jacobien de l'induction appliquée par rapport à l'espace est symétrique par rapport à sa diagonale principale, le système magnétohydrostatique correspondant est en équilibre stable.

Remarque : L'opérateur $b_j \cdot \frac{\partial B_i}{\partial x_j}$ ou $u_j \cdot \frac{\partial B_i}{\partial x_j}$ a été étudié dans le cas de petits mouvements (premier ordre) mais non linéarisés par rapport à l'espace. Tout ce qui a été dit précédemment est également valable pour la transformation linéaire suivante :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Nous retrouvons ici une remarque déjà faite sur les coefficients des matrices précédentes, c'est-à-dire :

$$A_{jj} = 0$$

$$A_{ij} - A_{ji} = J_k \qquad \text{(densité de courant extérieure)}$$

1.1.4. - Cas particulier de l'induction uniforme.

Ce problème a déjà été abordé par différents auteurs parmi lesquels

on peut citer H. ALFVEN [5], S. CHANDRASEKHAR [4] et H.K. MOFFAT. [1] . Ils ont montré que la perturbation d'un milieu électroconducteur en présence d'un champ d'induction uniforme conduit à la formation d'ondes magnétohydrodynamiques. On se propose ici, à titre d'exemple de généraliser cette étude en montrant que ces ondes ne constituent en fait que le régime transitoire d'un mouvement magnétohydrodynamique plus général.

Soit B_{oi} , l'induction uniforme appliquée au milieu électroconducteur l'équation s'écrit en dimensions réduites :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(P + \frac{1}{2} \cdot B_{oj}^2\right) = 0$$

1.1.4.1. - Mise en équation - Particularité

Dans ces conditions, tous les A_{ij} sont nuls, le système différentiel à résoudre devient alors :

$$(19) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + B_{oj} \cdot \frac{\partial b_i}{\partial x_j}$$

$$(20) \qquad \frac{\partial b_i}{\partial t} - \frac{1}{R_M} \cdot \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_j^2} = B_{oj} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$(3) \qquad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

$$(4) \qquad \frac{\partial b_j}{\partial x_j} = 0$$

Ce système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants est valable localement et dans tout l'espace.

En prenant la divergence de l'équation (19) et en tenant compte de (3) et (4), il vient :

$$(21) \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial x_j^2} = 0$$

Nous supposerons qu'il existe une condition initiale qui vérifie l'équation de continuité du champ d'induction, le système se réduit à :

$$(19) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + B_{oj} \cdot \frac{\partial b_i}{\partial x_j}$$

$$(20) \qquad \frac{\partial b_i}{\partial t} - \frac{1}{R_M} \cdot \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_j^2} = B_{oj} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$(21) \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial x_j^2} = 0$$

La variable scalaire $\mathcal{P}$ est indépendante du reste du système différentiel, les conditions aux limites la détermine. Il y a de plus découplage des équations vectorielles (19) et (20), il n'existe donc pas de relation entre des composants d'indices différents, le système différentiel se décomposant en une série de trois systèmes identiques.

avec $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ (k_i réels)

Ce cas correspond à la solution constante pour $\mathcal{P}$, cette variable étant définie à une constante près, nous écarterons également cette solution.

Dans le cas général, on a :

$$k_1^2 = -(k_2^2 + k_3^2) \qquad \text{par exemple} \quad (k_1, k_2, k_3 \neq 0)$$

Cette égalité n'est réalisable que pour des valeurs complexes, à une constante près, la solution est donc :

$$\mathcal{P} = \sum_{k,\Omega} \mathcal{P}_k \cdot e^{-i\Omega t} \cdot e^{ik_j x_j}$$

$$\mathcal{P} = \sum_{k_2,k_3,\Omega} \mathcal{P}_k \cdot e^{-i\Omega t} \cdot e^{\sqrt{k_2^2+k_3^2}\cdot x_1} \cdot e^{i(k_2 \cdot x_2 + k_3 \cdot x_3)}$$

où Ω est ici une constante arbitraire définie par la condition initiale et où $\mathcal{P}_k$ est défini à partir des conditions aux limites.

La pression étant calculée indépendamment, elle se comporte, dans l'équation (22) comme un second membre et par ailleurs il y a un découplage des composantes, il vient :

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{k_j^2}{Re} - i\omega\right) & -iB_{oj}\cdot k_j \\ -iB_{oj}\cdot k_j & \left(\frac{k_j^2}{R_M} - i\omega\right) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{ki} \\ b_{ki} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\cdot k_i \mathcal{P}_k \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.1.4.3. - Discussion du système

Sans second membre, le système précédent se réduit à :

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{k_j^2}{R_e} - i\omega\right) & -i B_{oj} k_j \\ -i B_{oj} k_j & \left(\frac{k_j^2}{R_M} - i\omega\right) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{ki} \\ b_{ki} \end{bmatrix} = 0$$

Il faut donc annuler le déterminant de la matrice du système, soit :

$$\left(\frac{k_j^2}{R_e} - i\omega\right) \cdot \left(\frac{k_j^2}{R_M} - i\omega\right) + \left(B_{oj} \cdot k_j\right)^2 = 0$$

ou

$$\omega^2 + i\omega\left[k_j^2 \cdot \left(\frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_M}\right)\right] - \left[\left(B_{oj} \cdot k_j\right)^2 + \frac{\left(k_j^2\right)^2}{R_e R_M}\right] = 0$$

C'est un polynôme du second degré de discriminant :

$$\delta = -\left(k_j^2\right)^2 \cdot \left[\frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_M}\right]^2 + 4\left[\left(B_{oj} \cdot k_j\right)^2 + \frac{\left(k_j^2\right)^2}{R_e \cdot R_M}\right]$$

Les différents cas possibles se résument dans le tableau I.

On note que chaque composante du spectre s'amortira différemment par l'intermédiaire du terme k_j^2 .

(a) $\delta > 0$: la propagation est pseudopériodique.

La vitesse de phase V_φ est dans ces conditions :

$$V_\varphi = \frac{Im(i\omega)}{k_j^2} \cdot k_i = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4.\left(B_{oj} k_j\right)^2 - \left(k_j^2\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_M}\right)^2} \cdot \frac{k_i}{k_j^2}$$

	δ	$-i\omega_1$	$-i\omega_2$
(a)	$+$	$-\frac{1}{2}\cdot k_j^2\cdot\left(\frac{1}{R_e}+\frac{1}{R_M}\right)$ $-\frac{i}{2}\sqrt{4(B_{oj}\cdot k_j)^2-(k_j^2)^2\left(\frac{1}{R_e}-\frac{1}{R_M}\right)^2}$	$-\frac{1}{2}\cdot k_j^2\cdot\left(\frac{1}{R_e}+\frac{1}{R_M}\right)$ $+\frac{i}{2}\sqrt{4(B_{oj}\cdot k_j)^2-(k_j^2)^2\left(\frac{1}{R_e}-\frac{1}{R_M}\right)^2}$
(b)	0	$-\frac{1}{2}\cdot k_j^2\cdot\left(\frac{1}{R_e}+\frac{1}{R_M}\right)$	$-\frac{1}{2}\cdot k_j^2\cdot\left(\frac{1}{R_e}+\frac{1}{R_M}\right)$
(c)	$-$	$-\frac{1}{2}\cdot k_j^2\cdot\left(\frac{1}{R_e}+\frac{1}{R_M}\right)$ $+\frac{1}{2}\sqrt{(k_j^2)^2\left(\frac{1}{R_e}-\frac{1}{R_M}\right)^2-4(B_{oj}\cdot k_j)^2}$	$-\frac{1}{2}\cdot k_j^2\cdot\left(\frac{1}{R_e}+\frac{1}{R_M}\right)$ $-\frac{1}{2}\sqrt{(k_j^2)^2\left(\frac{1}{R_e}-\frac{1}{R_M}\right)^2-4(B_{oj}\cdot k_j)^2}$
(d)	$R_e = R_M$	$-\frac{1}{2}\cdot k_j^2\cdot\left(\frac{1}{R_e}+\frac{1}{R_M}\right)-iB_{oj}\cdot k_j$	$-\frac{1}{2}\cdot k_j^2\cdot\left(\frac{1}{R_e}+\frac{1}{R_M}\right)+iB_{oj}\cdot k_j$

TABLEAU I

(b) $\delta = 0$: le mouvement de l'onde est critique.

(c) $\delta < 0$: l'onde est apériodique et évanescente ; on remarque de plus que :

$$-\frac{1}{2}\cdot k_j^2\cdot\left(\frac{1}{R_e}+\frac{1}{R_M}\right)\pm\sqrt{(k_j^2)^2\cdot\left(\frac{1}{R_e}-\frac{1}{R_M}\right)^2-4\cdot(B_{oj}\cdot k_j)^2}\ <0$$

pour toutes les valeurs de k_i .

Il n'y a donc pas d'instabilité possible due aux ondes de Alfven.

(d) $R_e = R_M$: c'est un cas particulier remarquable car le discriminant est positif pour toutes les valeurs de k_i , l'onde est alors toujours pseudopériodique.

La vitesse de phase V_{φ_i} est dans ce cas :

$$V_{\varphi_i} = \frac{Im(i\omega)}{k_j^2}\cdot k_i$$

$$= \frac{B_{oj}\cdot k_j}{k_j^2}\cdot k_i = B_o\cdot\cos\theta\cdot\frac{k_i}{|k|} \qquad \theta = (B_{oi}, k_i)$$

La vitesse de phase ne dépend plus des deux nombres de Reynolds, elle peut être celle d'un système non dissipatif.

On remarque aussi que, sauf dans le cas (b) il existe dans les ondes de Alfven les trois modes de propagation précédents (pseudopériodique, critique, apériodique). Dans le spectre toutes les composantes ne se propagent pas de la même façon, mais elles s'amortissent toujours exponentiellement.

Dans le cas de deux racines distinctes, les solutions sont alors :

$$u_i(x_i,t) = \sum_k \left(u_{ki_1}\cdot e^{-i\omega_1 t} + u_{ki_2}\cdot e^{-i\omega_2 t}\right)\cdot e^{ik_j x_j}$$

$$b_i(x_i,t) = \sum_k \left(b_{ki1} \cdot e^{-i\omega_1 t} + b_{ki2} \cdot e^{-i\omega_2 t} \right) \cdot e^{ik_j x_j}$$

Ces solutions correspondent à des ondes de Alfven, les vecteurs b_{ki} et u_{ki} étant colinéaires.

Avec second membre, le système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{k_j^2}{Re} - i\Omega\right) & -iB_{oj}.k_j \\ -iB_{oj}.k_j & \left(\frac{k_j^2}{R_M} - i\Omega\right) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{ki} \\ b_{ki} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ik_i.\mathcal{P}_k \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec $k_j^2 = 0$

Il vient :

$$u_{ki} = \frac{-k_i.\Omega.\mathcal{P}_k}{(B_{oj}.k_j)^2 - \Omega^2}$$

$$b_{ki} = \frac{k_i.(B_{oj}.k_j)}{(B_{oj}.k_j)^2 - \Omega^2}.\mathcal{P}_k$$

Les solutions correspondantes sont donc :

$$u_i(x_i,t) = \sum_{\Omega,k} \frac{-k_i.\Omega.\mathcal{P}_k}{(B_{oj}.k_j)^2 - \Omega^2} \cdot e^{-i\Omega t} \cdot e^{ik_j x_j}$$

$$b_i(x_i,t) = \sum_{\Omega,k} \frac{k_i.(B_{oj}.k_j).\mathcal{P}_k}{(B_{oj}.k_j)^2 - \Omega^2} \cdot e^{-i\Omega t} \cdot e^{ik_j x_j}$$

Elles ont perdu ici leur caractère ondulatoire.

La solution générale est la somme des deux solutions précédentes :

$$u_i(x_i,t) = \sum_{k,n} u_{kin} \cdot e^{-i\omega_n t} \cdot e^{ik_j x_j} + \sum_{k,\Omega} \frac{-k_i \cdot \Omega \cdot \mathcal{P}_k}{(B_{oj} \cdot k_j)^2 - \Omega^2} \cdot e^{-i\Omega t} \cdot e^{ik_j x_j}$$

$$b_i(x_i,t) = \sum_{k,n} b_{kin} \cdot e^{-i\omega_n t} \cdot e^{ik_j x_j} + \sum_{k,\Omega} \frac{k_i \cdot (B_{oj} \cdot k_j) \cdot \mathcal{P}_k}{(B_{oj} \cdot k_j)^2 - \Omega^2} \cdot e^{-i\Omega t} \cdot e^{ik_j x_j}$$

Remarque : Revenons à l'équation (21)

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial x_j^2} = 0$$

L'hypothèse des auteurs précédemment cités [1], [4], [5], pour la mise en évidence des ondes de Alfven, est la suivante :

Soit une perturbation initiale qui ne donne naissance qu'à un phénomène ondulatoire, dans ces conditions, la vitesse de propagation étant finie, il existe une surface fermée englobant la perturbation qui n'est pas encore atteinte par celle-ci. Sur cette surface, on a donc :

$\mathcal{P} = 0$ et comme $\mathcal{P}$ obéit à l'équation de Laplace, ses propriétés permettent de dire que :

$\mathcal{P} = 0$ partout

donc $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} = 0$

Nous sommes ramenés au système précédent sans second membre. Notre résultat, plus complet, a été établi d'une manière différente.

La linéarité des équations et la forme exponentielle des solutions permettent de considérer les équations de continuité (3) et (4) comme une condition initiale. Il suffit de les vérifier à l'instant t = 0.

1.1.4.4. - Particularité des solutions

Posons :

$$u_i(x_i,t) = u_{i\alpha}(x_i,t) + u_{i\beta}(x_i,t)$$

$$b_i(x_i,t) = b_{i\alpha}(x_i,t) + b_{i\beta}(x_i,t)$$

avec

$$u_{i\alpha}(x_i,t) = \sum_{k,n} u_{kni} \cdot e^{-i\omega_n t} \cdot e^{ik_j x_j}$$

$$b_{i\alpha}(x_i,t) = \sum_{k,n} b_{kni} \cdot e^{-i\omega_n t} \cdot e^{ik_j x_j}$$

$$u_{i\beta}(x_i,t) = \sum_{k,\Omega} \frac{-k_i \cdot \Omega \cdot \mathcal{P}_k}{(B_{oj} \cdot k_j)^2 - \Omega^2} \cdot e^{-i\Omega t} \cdot e^{ik_j x_j}$$

$$b_{i\beta}(x_i,t) = \sum_{k,\Omega} \frac{k_i \cdot (B_{oj} k_j) \cdot \mathcal{P}_k}{(B_{oj} \cdot k_j)^2 - \Omega^2} \cdot e^{-i\Omega t} \cdot e^{ik_j x_j}$$

1.1.4.4.1. - Particularité hydrodynamique [15]

La partie de la vitesse $u_{i\beta}(x_i,t)$ dérive d'un potentiel scalaire :

$$\varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} u_{k\beta}(x_i,t) = 0$$

$u_i(x_i,t)$ vérifie l'équation de continuité :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} u_{j\alpha}(x_i,t) = 0$$

Par conséquent, la vitesse peut se mettre sous la forme de la somme d'un gradient et d'un rotationnel.

$$u_i(x_i,t) = \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial V_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

Cette expression de la vitesse correspond à la décomposition d'Helmoltz concernant le mouvement d'un élément de fluide, c'est-à-dire :

$\varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial V_k}{\partial x_j}$: rotation des éléments fluide.

$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$: déformation des éléments fluide.

De plus, l'équation de continuité du vecteur $u_i(x_i,t)$ indique que :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2} = 0$$

On est donc en présence d'un mouvement à potentiel des vitesses.

Les ondes de Alfven, qui s'amortissent toujours exponentiellement, se présentent ici comme le régime transitoire d'un écoulement à potentiel des vitesses, le mouvement des éléments de fluide devient donc progressivement une déformation.

1.1.4.4.2. - Equation des vecteurs tourbillon et densité de courant

Soient : $T_i = \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$ Vecteur tourbillon.

$j_i = \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial b_k}{\partial x_j}$ Vecteur densité de courant.

En prenant le rotationnel des équations (19) et (20), il vient :

$$(25)\quad \frac{\partial T_i}{\partial t} - \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial^2 T_i}{\partial x_j^2} = B_{oj} \cdot \frac{\partial j_i}{\partial x_j}$$

$$(26)\quad \frac{\partial j_i}{\partial t} - \frac{1}{R_M} \cdot \frac{\partial^2 j_i}{\partial x_j^2} = B_{oj} \cdot \frac{\partial T_i}{\partial x_j}$$

Nous retrouvons avec les vecteurs j_i et T_i , l'équation sans second membre, on a :

$$T_i = \sum_{k,n} T_{kni} \cdot e^{-i\omega_n t} \cdot e^{ik_j x_j}$$

$$j_i = \sum_{k,n} \frac{\left(\frac{k_j^2}{Re} - i\omega\right)}{i B_{oj} k_j} \cdot T_{kni} \cdot e^{-i\omega_n t} \cdot e^{ik_j x_j}$$

Les vecteurs tourbillon et densité de courant ne sont l'objet que d'une propagation du type onde de Alfven. Ces relations peuvent d'ailleurs être obtenues en prenant le rotationnel de $u_i(x_i,t)$ et $b_i(x_i,t)$.

L'uniformité du champ d'induction imposé provoque une dégénérescence du problème des petites perturbations à cause du découplage des composantes u_i et b_i . On obtient ainsi une simplicité de résolution faisant apparaître d'abord des ondes magnétohydrodynamiques qui s'amortissent et correspondent à la rotation des éléments fluides, ensuite un mouvement hydrodynamique à potentiel des vitesses qui représente la déformation des éléments de fluide. Ce résultat complète celui obtenu par certains auteurs, parmi lesquels on peut citer H. ALFVEN [5] , S. CHANDRASEKHAR [4] et H.K. MOFFAT [1] . En généralisant la perturbation d'un milieu électroconducteur en présence d'un champ d'induction uniforme, on montre que les ondes magnétohydrodynamiques ne sont que le régime transitoire d'un mouvement à potentiel des vitesses.

1.2. - Equilibres instationnaires.

1.2.1. - Mise en équation

L'étude de l'équilibre établi à partir d'inductions et de courants instationnaires s'effectue à partir de la méthode des petites perturbations suivant le modèle précédent. Le système différentiel obtenu est :

$$(27)\quad \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{1}{R_e} \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + B_j \cdot \frac{\partial b_i}{\partial x_j} + b_j \cdot \frac{\partial B_i}{\partial x_j}$$

$$(28)\quad \frac{\partial b_i}{\partial t} - \frac{1}{R_M} \cdot \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_j^2} = B_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_j \cdot \frac{\partial B_i}{\partial x_j}$$

$$(3)\quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \qquad R_e = \frac{\rho \cdot a \cdot u_0}{\eta}$$

avec

$$(4)\quad \frac{\partial b_i}{\partial x_j} = 0 \qquad R_M = \sigma \cdot \mu \cdot a \cdot u_0$$

L'induction B_i et ses dérivées $\frac{\partial B_i}{\partial x_j}$ dépendent ici de l'espace et du temps.

1.2.2. - Méthode de résolution

1.2.2.1. - Méthode de la perturbation locale

En utilisant le développement limité de l'induction (5) et en reportant

dans le système différentiel (27), (28), (3) et en négligeant les termes du second ordre, on obtient :

$$(29)\quad \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{1}{R_e} \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + B_{oj} \cdot \frac{\partial b_i}{\partial x_j} + A_{ij} \cdot b_j$$

$$(30)\quad \frac{\partial b_i}{\partial t} - \frac{1}{R_M} \cdot \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_j^2} = B_{oj} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - A_{ij} \cdot u_j$$

$$(3)\quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

B_{oj} et A_{ij} étant des fonctions déterminées du temps.

Recherchons des solutions de la forme :

$$\begin{bmatrix} u_i \\ b_i \\ \mathcal{P} \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} u_{ki} \\ b_{ki} \\ \mathcal{P}_k \end{bmatrix} \cdot e^{-i\omega(t).t} \cdot e^{ik_j x_j}$$

En reportant dans le système différentiel, et pour chaque composante, on a :

$$(31)\quad -u_{ki}\left[i \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\omega(t).t\right)\right] + \frac{k_j^2}{R_e} \cdot u_{ki} = -ik_i \cdot \mathcal{P}_k + (iB_{oj}k_j) \cdot b_{ki} + A_{ij} \cdot b_{kj}$$

$$(32)\quad -b_{ki}\cdot\left[i\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\omega(t).t\right)\right]+\frac{k_j^2}{R_M}\cdot b_{ki}=\left(i\,B_{oj}k_j\right)u_{ki}-A_{ij}.u_{kj}$$

$$(10)\quad i\,k_j.u_j=0$$

Sous forme matricielle, il vient :

$$M_3 * \text{Colonne}\left[u_{k1},u_{k2},u_{k3},b_{k1},b_{k2},b_{k3},\mathcal{P}_k\right]$$

Ce système algébrique admet d'autres solutions que la solution zéro si le déterminant Δ de sa matrice est nul.

1.2.2.2. - <u>Forme des solutions locales - étude de la stabilité</u>

Si le développement du déterminant (33) associé au système différentiel peut s'écrire :

$$f(k_i)\cdot\prod_{n=1}^{6}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(i\,\omega(t).t\right)-f_n(t)\right]=0$$

Il y a deux possibilités pour l'annuler, soit :

$$f(k_i)=0$$

$$i\,\omega_n(t).t=\int_{\alpha}^{t}f_n(t).\,dt$$

$$
M_3 = \begin{bmatrix}
\frac{k_j^2}{Re} - \frac{\partial}{\partial t}(i\omega t) & 0 & 0 & -(iB_{oj}k_j + A_{11}) & -A_{21} & -A_{31} & ik_1 \\
0 & \frac{k_j^2}{Re} - \frac{\partial}{\partial t}(i\omega t) & 0 & -A_{12} & -(iB_{oj}k_j + A_{22}) & -A_{32} & ik_2 \\
0 & 0 & \frac{k_j^2}{Re} - \frac{\partial}{\partial t}(i\omega t) & -A_{13} & -A_{23} & -(iB_{oj}k_j + A_{33}) & ik_3 \\
(A_{11} - iB_{oj}k_j) & A_{21} & A_{31} & \frac{k_j^2}{R_M} - \frac{\partial}{\partial t}(i\omega t) & 0 & 0 & 0 \\
A_{12} & (A_{22} - iB_{oj}k_j) & A_{32} & 0 & \frac{k_j^2}{R_M} - \frac{\partial}{\partial t}(i\omega t) & 0 & 0 \\
A_{13} & A_{23} & (A_{33} - iB_{oj}k_j) & 0 & 0 & \frac{k_j^2}{R_M} - \frac{\partial}{\partial t}(i\omega t) & 0 \\
ik_1 & ik_2 & ik_3 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

Matrice M_3

Les solutions sont donc :

$$\begin{bmatrix} u_i \\ b_i \\ \mathcal{P} \end{bmatrix} = \sum_{k,n=1}^{6} \begin{bmatrix} u_{kni} \\ b_{kni} \\ \mathcal{P}_{kn} \end{bmatrix} \cdot e^{-\int_{\alpha}^{t} f_n(t)\,dt} \cdot e^{ik_j x_j} + \sum_{k,\Omega} u_{\Omega i} \cdot e^{-i\Omega t} \cdot e^{ik_j x_j}$$

Les composantes du vecteur k_i satisfont à la relation $f(k_i) = 0$ pour le second terme.

La solution générale ne peut être obtenue par cette méthode que si $f(k_i)$ ne dépend pas du temps, dans le cas contraire il faut rechercher une autre solution, particulière et linéairement indépendante, du système (29), (30), (3), soit :

$$\begin{bmatrix} u_i \\ b_i \\ \mathcal{P} \end{bmatrix} = \sum_{k,n=1}^{6} \begin{bmatrix} u_{kni} \\ b_{kni} \\ \mathcal{P}_{k} \end{bmatrix} \cdot e^{-i\omega(t)t} \cdot e^{ik_j x_j} + \begin{bmatrix} \varepsilon_i \\ \beta_i \\ \pi \end{bmatrix} (x_i, t)$$

où $\begin{bmatrix} \varepsilon_i(x_i,t) \\ \beta_i(x_i,t) \\ \pi(x_i,t) \end{bmatrix}$ est une solution particulière.

2. ETUDE DE LA STABILITE MAGNETOHYDROSTATIQUE DES MILIEUX COMPRESSIBLES

Du fait de la non existence de l'équilibre instationnaire des milieux compressibles, l'étude de ce paragraphe se bornera donc au cas stationnaire.

2.1. - Mise en équation

Les équations de l'équilibre sont inchangées, mais les paramètres d'état du fluide ($\rho, c, \eta, \ldots$) sont des fonctions de l'espace. A partir de grandeurs de références données, la méthode des petites perturbations pour une conductivité électrique constante, conduit au système différentiel suivant :

$$(34)\quad \bar{\rho}(x_i)\cdot\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)\right] = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + B_j\cdot\frac{\partial b_i}{\partial x_j} + b_j\cdot\frac{\partial b_i}{\partial x_j}$$

$$(35)\quad \frac{\partial b_i}{\partial t} - \frac{1}{R_M}\cdot\frac{\partial^2 b_i}{\partial x_j^2} = B_j\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_j\cdot\frac{\partial B_i}{\partial x_j} - B_i\cdot\frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

$$(36)\quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{1}{c^2(x_i)}\cdot\left[\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} - B_j\cdot\frac{\partial b_i}{\partial t}\right] = 0$$

(4) $$\frac{\partial b_j}{\partial x_j} = 0 \qquad \text{avec } \overline{\rho}(x_i) = \frac{\rho'(x_i)}{\rho_0} \quad \text{et} \quad C(x_i) = \frac{c'(x_i)}{u_0}$$

2.2. - Méthode de résolution

La multiplicité des paramètres dépendants de l'espace ne permet pas l'application de la méthode de la représentation paramétrique et l'hypothèse de la perturbation localisée conduit à une résolution simple soit :

(37) $$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{1}{Re}\cdot\left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)\right] = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + B_{oj}\cdot\frac{\partial b_i}{\partial x_j} + A_{ij}\cdot b_j$$

(38) $$\frac{\partial b_i}{\partial t} - \frac{1}{R_M}\cdot\frac{\partial^2 b_i}{\partial x_j^2} = B_{oj}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - A_{ij}\cdot u_j - B_{oi}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

(39) $$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{1}{c^2}\cdot\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} - B_{oj}\cdot\frac{\partial b_j}{\partial t}\right) = 0$$

En recherchant des solutions exponentielles de la forme $e^{-i\omega t}\cdot e^{ik_j x_j}$ on obtient :

(40) $$M_4 * \text{Colonne}\left[u_{k1}, u_{k2}, u_{k3}, b_{k1}, b_{k2}, b_{k3}, \mathcal{P}_k\right]$$

On impose donc au système (40) d'annuler son déterminant, soit :

$$\Delta = DET[M_4] = \prod_{n=1}^{7}\left(\omega - \omega_n(k_i)\right) = 0$$

$$
M_4 = \begin{bmatrix}
\frac{1}{Re}\left(k_j^2 + \frac{k_1^2}{3}\right) - i\omega & \frac{k_1 k_2}{3Re} & \frac{k_1 k_3}{3Re} & -(A_{11} + iB_{oj}k_j) & -A_{21} & -A_{31} & ik_1 \\
\frac{k_2 k_1}{3Re} & \frac{1}{Re}\left(k_j^2 + \frac{k_2^2}{3}\right) - i\omega & \frac{k_2 . k_3}{3Re} & -A_{12} & -(A_{22} + iB_{oj}k_j) & -A_{32} & ik_2 \\
\frac{k_3 k_1}{3Re} & \frac{k_3 k_2}{3Re} & \frac{1}{Re}\left(k_j^2 + \frac{k_3^2}{3}\right) - i\omega & -A_{13} & -A_{23} & -(A_{33} + iB_{oj}k_j) & ik_3 \\
A_{11} - iB_{oj}k_j + ik_1 . B_{o1} & A_{21} + ik_2 B_{o1} & A_{31} + ik_3 B_{o1} & \frac{k_j^2}{R_M} - i\omega & 0 & 0 & 0 \\
A_{12} + ik_1 B_{o2} & A_{22} - iB_{oj}k_j + ik_2 B_{o2} & A_{32} + ik_3 B_{o2} & 0 & \frac{k_j^2}{R_M} - i\omega & 0 & 0 \\
A_{13} + ik_1 B_{o3} & A_{23} + ik_2 . B_{o3} & A_{33} - iB_{oj}k_j + ik_3 . B_{o3} & 0 & 0 & \frac{k_j^2}{R_M} - i\omega & 0 \\
ik_1 & ik_2 & ik_3 & \frac{-i\omega B_{o1}}{c^2} & \frac{-i\omega B_{o2}}{c^2} & \frac{-i\omega B_{o3}}{c^2} & \frac{i\omega}{c^2}
\end{bmatrix}
$$

Matrice M_4

Les solutions sont ondulatoires du type magnétoacoustique :

$$\begin{bmatrix} u_i \\ b_i \\ \mathcal{P} \end{bmatrix} = \sum_{k,n=1}^{7} \begin{bmatrix} u_{kni} \\ b_{kni} \\ \mathcal{P}_{kn} \end{bmatrix} \cdot e^{-i\omega_n t} \cdot e^{ik_j x_j}$$

La stabilité des perturbations localisées s'étudie donc en fonction de signe de la partie réelle de $(-i\omega)$.

3. CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE A LA REALISATION D'UN EQUILIBRE MAGNETOHYDROSTATIQUE

Les équations de l'équilibre sont :

$$(41) \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(P + \frac{B_j^2}{2}\right) = B_j \cdot \frac{\partial B_i}{\partial x_j}$$

$$(42) \quad \frac{\partial B_j}{\partial x_j} = 0$$

$$(43) \quad \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j^2} = 0$$

La validité de l'équation (41) est donnée par (44) :

$$(44) \quad \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left(B_n \cdot \frac{\partial B_k}{\partial x_n} \right) = 0$$

Cela signifie que le vecteur $B_n \cdot \frac{\partial B_i}{\partial x_n}$ dérive d'un potentiel scalaire, à condition qu'il corresponde à la pression $P + \frac{B_j^2}{2}$ du système magnétohydrostatique ; la condition (44) n'est qu'une condition nécessaire que nous allons compléter.

Supposons que (44) soit vérifiée il existe une fonction $\phi(x_i)$ arbitraire, à dérivées partielles définies et continues, telle que :

$$B_j \cdot \frac{\partial B_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

Donc, il existe une fonction $\Psi(x_i)$ ou un vecteur $V_i(x_i)$ vérifiant :

$$(45) \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(P + \frac{B_j^2}{2} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}$$

ou

$$(46) \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(P + \frac{B_j^2}{2} \right) + \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial V_k}{\partial x_j}$$

Si nous imposons au vecteur V_i d'être à flux conservatif, il vient :

$$(47) \quad \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0$$

$$(2) \qquad \frac{\partial b_i}{\partial t} - \frac{1}{R_M} \cdot \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_j^2} = B_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_j \cdot \frac{\partial B_i}{\partial x_j}$$

$$(3) \qquad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

$$(4) \qquad \frac{\partial b_j}{\partial x_j} = 0$$

$$(50) \qquad \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0$$

Ce système peut se résoudre par les méthodes précédemment citées ; il faut remarquer qu'il existe ici un second membre.

Remarque : Si on impose au vecteur V_i d'être à flux conservatif, il vérifie alors simultanément les équations :

$$(51) \qquad \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0$$

$$(52) \qquad \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2} = 0$$

Nous constatons alors que le vecteur V_i obéit aux mêmes lois que le champ d'induction magnétique ou le champ électrostatique dans le cas stationnaire. Il existe donc une méthode analogique pour la détermination du vecteur V_i .

4. ETUDE DES SYSTEMES DESEQUILIBRES

4.1. - Généralités

On appelle système déséquilibrés, un milieu électroconducteur soumis à une force de Laplace ne dérivant pas d'un potentiel scalaire.

Les forces de Laplace peuvent alors être représentées par la somme d'un gradient et d'un rotationnel, soit :

$$(53) \qquad \varepsilon_{ijk} \cdot J_j \cdot B_k = \frac{\partial P}{\partial x_i} + \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial V_k}{\partial x_j}$$

dans le milieu supposé au repos à l'instant initial.

Le déséquilibre qui apparaît entre les forces de Laplace et le gradient de pression provoque un mouvement, nous sommes alors dans le cas général de la magnétohydrodynamique.

4.2. - Systèmes quasi-équilibrés

4.2.1. - Définition et propriétés

On appelle système quasi-équilibré, un milieu électroconducteur dont les vecteurs courant et induction magnétique ne diffèrent que d'un infiniment petit du premier ordre par rapport aux valeurs de l'équilibre.

Soit donc un système magnétohydrostatique équilibré :

$$(54) \qquad \frac{\partial P}{\partial x_i} = \varepsilon_{ijk} \cdot J_j \cdot B_k$$

Considérons un écart du premier ordre avec :

$$\varepsilon_{ijk} \cdot \left(J_j + \delta J_j \right) \cdot \left(B_k + \delta B_k \right)$$

la nouvelle force de Laplace et

$$(55) \qquad \delta J_i = \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\delta B_k \right)$$

nécessairement.

Les variations δJ_i et δB_i sont imposées, ce sont des états permanents du système.

Deux cas peuvent alors se présenter.

Tout d'abord, supposons qu'il existe un gradient de pression capable d'équilibrer la nouvelle force électromagnétique.

$$(56) \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} \left(P + \delta P \right) = \varepsilon_{ijk} \cdot \left(J_j + \delta J_j \right) \cdot \left(B_k + \delta B_k \right)$$

En tenant compte de la relation (54) et en négligeant les termes du second ordre :

$$(57) \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\delta P \right) = \varepsilon_{ijk} \cdot \left(\delta J_j \cdot B_k + J_j \cdot \delta B_k \right)$$

On obtient alors un nouveau système équilibré.

Considérons maintenant le cas général d'un système quasi équilibré où n'existe donc pas de gradient de pression en mesure de compenser la force de Laplace qui se décompose suivant le modèle de la relation (53) et en négligeant les termes du second ordre :

$$(58) \qquad \varepsilon_{ijk} \cdot \left(\delta J_j \cdot B_k + J_j \cdot \delta B_k \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\delta P \right) + \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\delta V_k \right)$$

On peut alors déterminer le scalaire δP et le vecteur δV_i. En prenant respectivement la divergence et le rotationnel de l'équation vectorielle (58), on peut écrire :

$$(59) \qquad \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(\delta P) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\varepsilon_{jnk}\cdot\left(\delta J_n \cdot B_k + J_n \cdot \delta B_k\right)\right]$$

$$(60) \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}(\delta V_j)\right] - \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(\delta V_i) = \varepsilon_{ijk}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\varepsilon_{kmn}\cdot\left(\delta J_m \cdot B_n + J_m \cdot \delta B_n\right)\right]$$

Si on impose au vecteur δV_i d'être à divergence nulle, δP et δV_i obéissent alors à une équation de Poisson.

4.2.2. - Equations du mouvement

A l'instant initial, dans le milieu immobile, la force agissante est :

$$\delta F_i = -\frac{\partial}{\partial x_i}(\delta P) + \varepsilon_{ijk}\cdot\left[\delta J_j \cdot B_k + J_j \cdot \delta B_k\right]$$

$$= \varepsilon_{ijk}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}(\delta V_k)$$

Le mouvement qui s'établit, supposé de faible amplitude est régi par le système différentiel suivant :

$$(61) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{1}{Re}\cdot\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} - B_j \cdot \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \cdot \frac{\partial B_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}(\delta V_k)$$

$$(62)\quad \frac{\partial b_i}{\partial t} - \frac{1}{R_M} \cdot \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_j^2} - B_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \cdot \frac{\partial B_i}{\partial x_j} = 0$$

$$(63)\quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

$$(64)\quad \frac{\partial b_j}{\partial x_j} = 0$$

On recherche une solution générale du système (61) (62) et (63) sans second membre en étudiant d'abord une perturbation localisée et en effectuant une représentation paramétrique suivant la méthode du chapitre I, on obtient :

$$\begin{bmatrix} u_{oi} \\ b_{oi} \\ \mathcal{P}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{oi} \\ b_{oi} \\ \mathcal{P}_o \end{bmatrix} (x_i, t)$$

Cette solution représente la perturbation de l'équilibre associé au système quasi-équilibré. Il faut ajouter une solution particulière avec second membre qui dépend alors de la forme de

$$\varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\delta V_k \right) = 0$$

On peut effectuer une décomposition de Fourier de ce vecteur et identifier la solution composante par composante.

Le résultat général est donc :

$$\begin{bmatrix} u_i \\ b_i \\ \mathcal{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{0i} \\ b_{0i} \\ \mathcal{P}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1i} \\ b_{1i} \\ \mathcal{P}_1 \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{bmatrix} u_{1i} \\ b_{1i} \\ \mathcal{P}_1 \end{bmatrix}$$ solution particulière avec second membre.

On remarque en outre, que si le système magnétohydrostatique d'origine est stable, la solution sans second membre s'amortit. Si

$\varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta V_k)$ ne dépend pas du temps, il s'établit alors un régime permanent.

5. CONCLUSION

A partir d'un équilibre magnétohydrostatique réalisé, on a recherché une méthode permettant d'étudier la stabilité du système à l'aide de l'hypothèse des perturbations infinitésimales. Des solutions locales ont été obtenues dans le cas de champs d'induction lentement variables dans l'espace et une généralisation rendue possible notamment pour les fluides incompressibles. Des systèmes, appelés quasi-équilibrés, ont fait l'objet d'une étude particulière.

DEUXIEME PARTIE

APPLICATION A LA MAGNETOACOUSTIQUE

CHAPITRE I

LE RESONATEUR D'HELMOLTZ MAGNETOHYDRODYNAMIQUE

1. ETUDE THEORIQUE

1.1. - Equilibre du système

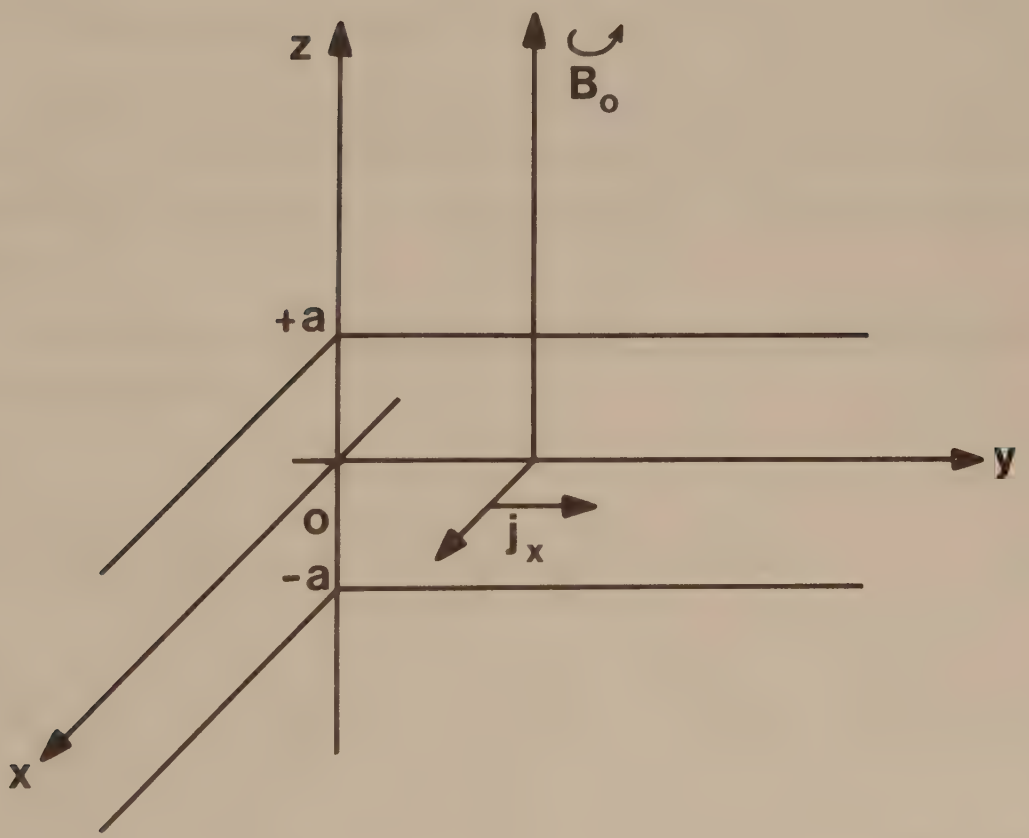


Figure 1

Soit un milieu électroconducteur contenu entre deux plans parallèles au plan xoy (figure 1) et parcouru par une densité de courant j_0 suivant Ox, l'équilibre s'écrit alors :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = j_0 . B_0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(P + \frac{B^2}{2\mu}\right) = 0$$

L'étude du système magnétohydrostatique nous indique que celui-ci est équilibré.

1.2. - Perturbation du milieu

Considérons un système magnétohydrostatique, indéfini dans le plan (xoy) d'épaisseur 2a, contenant un fluide incompressible, placé en présence d'un champ d'induction uniforme B_0 dirigé suivant Oz et d'un courant instationnaire suivant Ox.

On peut écrire, sous forme adimensionnelle avec les grandeurs de références habituelles :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left(P + \frac{B^2}{2}\right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = - B . \frac{\partial B}{\partial z}$$

$$Re = \frac{a . u_0 . \rho}{\eta}$$

$$R_M = \sigma . \mu . a . u_0$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{R_M} \cdot \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Remarque concernant la pression

En prenant la divergence de la première équation, il vient

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(P + \frac{B^2}{2}\right) = 0 \qquad \text{or,} \quad B = B(z)$$

Par conséquent

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(P + \frac{B^2}{2}\right) = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{Soit}$$

$$P = \lambda(z)\cdot y + \mu(z)$$

Nous n'imposons pas de pression d'origine extérieure, les plans parallèles aux parois sont des surfaces isobares, ce qui implique

$$\lambda(z) = 0$$

$$P = \mu(z)$$

Par suite, la seconde équation s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(P + \frac{B^2}{2}\right) = 0 \qquad \text{donc} \quad P + \frac{B^2}{2} = f(y)$$

$$\mu(z) + \frac{B^2}{2} = f(y) = P_0$$

En définitive

$$P + \frac{B^2}{2} = P_0$$

Les composantes de u et B montrent que leurs équations de continuité sont identiquement vérifiées

$$\frac{\partial}{\partial y} u(z,t) = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial y} B(z,t) = 0$$

1.3. - Résolution du système (S)

Il reste donc à résoudre le système formé par les équations (1) et (3).

Le fluide utilisé étant de viscosité très faible, nous pouvons négliger $\frac{1}{R_e}$ devant $\frac{1}{R_M}$.

Recherchons des solutions sinusoïdales

$$u = \bar{u} \cdot e^{i\omega t} \qquad \text{et} \qquad B = \bar{B} \cdot e^{i\omega t}$$

Le système s'écrit

$$i\omega \cdot \bar{u} = \frac{\partial \bar{B}}{\partial z}$$

$$i\omega \bar{B} = \frac{1}{R_M} \cdot \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial z^2} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

$\bar{u}$ et $\bar{B}$ ne dépendent que de z, le système différentiel est linéaire et les solutions sont de forme exponentielle, soit

$$\bar{u} = \alpha \cdot e^{\gamma z} \qquad \bar{B} = \beta \cdot e^{\gamma z}$$

On en déduit

$$\begin{bmatrix} i\omega & -\gamma \\ -\gamma & i\omega - \frac{\gamma^2}{R_M} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0$$

Pour d'autres solutions que la solution zéro, le déterminant de la matrice doit être nul, ce qui détermine γ

$$\omega^2 + \left(\frac{i\omega}{R_M} + 1 \right) \gamma^2 = 0$$

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2 . R_M}{R_M^2 + \omega^2} \cdot (i\omega - R_M)$$

Soit

$$\gamma = \pm (a + b.i)$$

Avec

$$a = \left[\left(\frac{\sqrt{R_M^2 + \omega^2} - R_M}{2} \right) \cdot \frac{\omega^2 . R_M}{R_M^2 + \omega^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$b = \left[\left(\frac{\sqrt{R_M^2 + \omega^2} - R_M}{2} \right) \cdot \frac{\omega^2 . R_M}{R_M^2 + \omega^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Il vient donc

$$\bar{u} = (a+bi) . \left[C_1 . e^{(a+bi)z} - C_2 . e^{-(a+bi)z} \right]$$

$$\bar{B} = i\omega . \left[C_1 . e^{(a+bi)z} + C_2 . e^{-(a+bi)z} \right]$$

Pour préciser les constantes C_1 et C_2, on fait intervenir la symétrie de la vitesse

$$\bar{u}(z) = \bar{u}(-z) \qquad C_1 = -C_2 = C'$$

On a alors

$$u = \bar{u} \cdot e^{i\omega t} = C \cdot (a+bi) \cdot ch[(a+bi)z] \cdot e^{i\omega t}$$

$$B = \bar{B} \cdot e^{i\omega t} = C \cdot i\omega \cdot sh[(a+bi)z] \cdot e^{i\omega t}$$

$$P = P_0 - \frac{B^2}{2}$$

Avec $C = \frac{C'}{2}$

On peut remarquer que, malgré l'absence de viscosité, il existe une répartition de vitesse non uniforme dans la section transversale du système. L'alimentation en courant alternatif sinusoïdal s'accompagne d'un effet de peau, la densité de courant n'est pas uniforme, elle est maximale aux parois de même que la force de Laplace. Compte tenu de la fréquence employée, cet effet est numériquement négligeable, nous n'étudierons donc pas la répartition de la vitesse, car son module est ici pratiquement indépendant de la dimension z.

La constante d'intégration C est d'origine électromagnétique et dépend de l'intensité qui traverse le circuit.

Considérons la pompe électromagnétique alimentée par une intensité d'amplitude I par unité de longueur réduite. On peut alors calculer C.

La densité de courant est j'

$$j = \frac{j'}{j_0} = \frac{\partial B}{\partial z} \qquad j_0 = \frac{B_0}{\mu \cdot a}$$

$$I = \frac{I'}{I_0} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial B}{\partial z} \cdot dy \cdot dz \qquad I_0 = j_0 \cdot a^2$$

$$= 2 \cdot [B]_{-1}^{+1}$$

Le courant réduit I est

$$I = 4.i\omega.\,sh(a+bi).\,C$$

Donc

$$C = \frac{I}{4.i\omega.\,sh(a+bi)}$$

Dans ces conditions

$$u = \frac{I\,(a+bi)}{4.i\omega.\,sh(a+bi)}.\,ch[(a+bi)z].\,e^{i\omega t}$$

$$B = \frac{I}{4.\,sh(a+bi)}.\,sh[(a+bi)z].\,e^{i\omega t}$$

$$P = P_0 - \frac{B^2}{2}$$

Il est intéressant de calculer l'amplitude de la vitesse moyenne U qui est la grandeur utilisable.

$$U = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} u.\,dz$$

Soit

$$U = \frac{I.\,e^{i\omega t}}{4\,i\omega} \qquad \text{et} \qquad |U| = \frac{I}{4\omega}$$

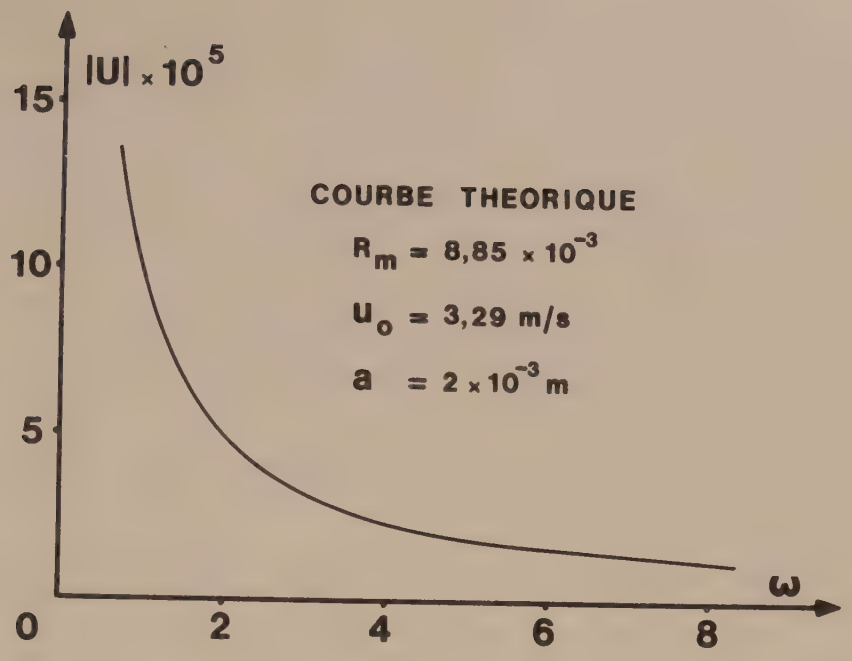


Figure 2.

2. AMELIORATION DES PERFORMANCES

Ces résultats (figure 2) montrent que cette pompe électromagnétique fonctionnant en régime dynamique a de mauvaises performances car il faut un champ magnétique et un courant intense pour obtenir une faible vitesse, en particulier lorsque l'on augmente la fréquence. Ceci est évidemment du à l'inertie du fluide se trouvant entre les électrodes. Afin d'éliminer cet effet nous nous proposons d'ajouter aux forces en présence une force de rappel proportionnelle à l'élongation moyenne. La mise en équation précédente subit une légère modification, et on obtient en valeur réduite

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial z} - k\,\bar{y} = \frac{\partial B}{\partial z} - k\,\frac{U}{i\omega}$$

$\bar{y}$ (élongation moyenne)

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{R_M}\cdot\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Par rapport à l'étude précédente, le système différentiel comporte un second membre

$$\begin{bmatrix} i\omega & -\gamma \\ -\gamma & i\omega - \frac{\gamma^2}{R_M} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k.\frac{U}{i\omega} \\ 0 \end{bmatrix}$$

u garde la même valeur, mais il faut chercher une solution particulière au système

$$i\omega.\bar{u} = \frac{\partial \bar{B}}{\partial z} - k.\frac{U}{i\omega}$$

$$i\omega\,\bar{B} = \frac{1}{R_M}.\frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial z^2} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

Soit

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k.\frac{U}{\omega^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

En ajoutant cette solution particulière aux résultats précédents, on obtient à l'intensité constante

$$u = \left[\frac{I.(a+bi)}{4i\omega\,sh(a+bi)}.ch[(a+bi).z] + \frac{k.U}{\omega^2}\right].e^{i\omega t}$$

$$B = \left[\frac{I}{4\,sh(a+bi)}.sh[(a+bi).z]\right].e^{i\omega t}$$

$$P = P_0 - \frac{B^2}{2}$$

Seule la vitesse a subi une modification.

Calculons la vitesse moyenne

$$U = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \bar{u} \cdot dz = -\frac{i \cdot I}{4\omega} + \frac{k}{\omega^2} \cdot U$$

Soit

$$U = \frac{I \cdot \omega}{4i(\omega^2 - k)} \qquad \text{et} \qquad |U| = \frac{I \cdot \omega}{4(\omega^2 - k)}$$

Sans modifier les autres paramètres, on obtient pour U une résonance

$$\omega_o = \sqrt{k}$$

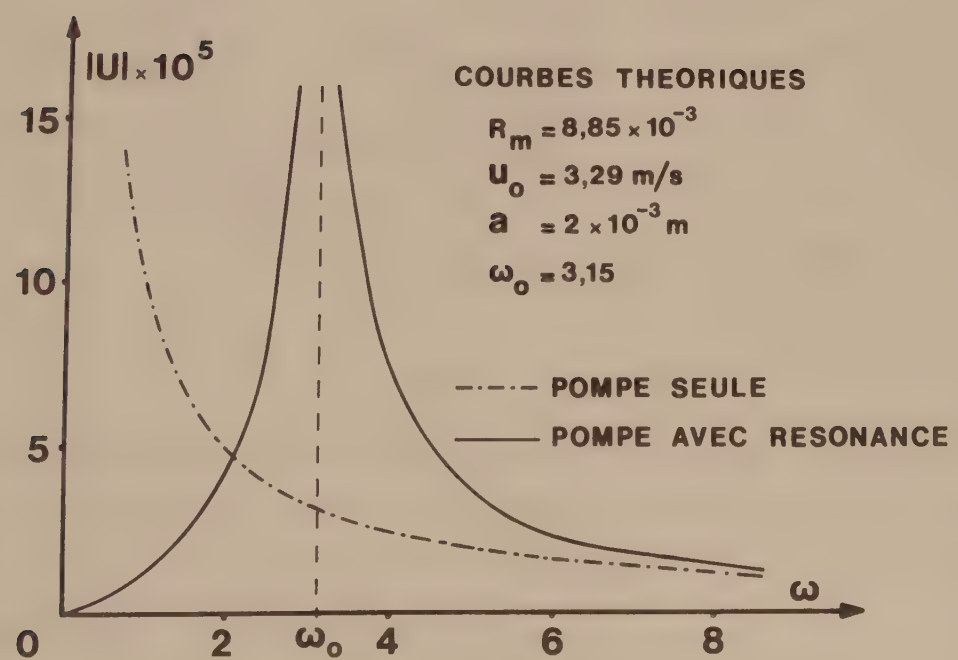


Figure 3

On améliore ainsi le fonctionnement, la vitesse étant relativement plus élevée que dans le cas précédent.

La figure 3 montre qu'au moins au voisinage d'une pulsation donnée $\omega_0 = \sqrt{k}$, la pompe électromagnétique résonante est plus performante.

3. ETUDE EXPERIMENTALE

3.1. - Théorie du résonateur d'Helmoltz

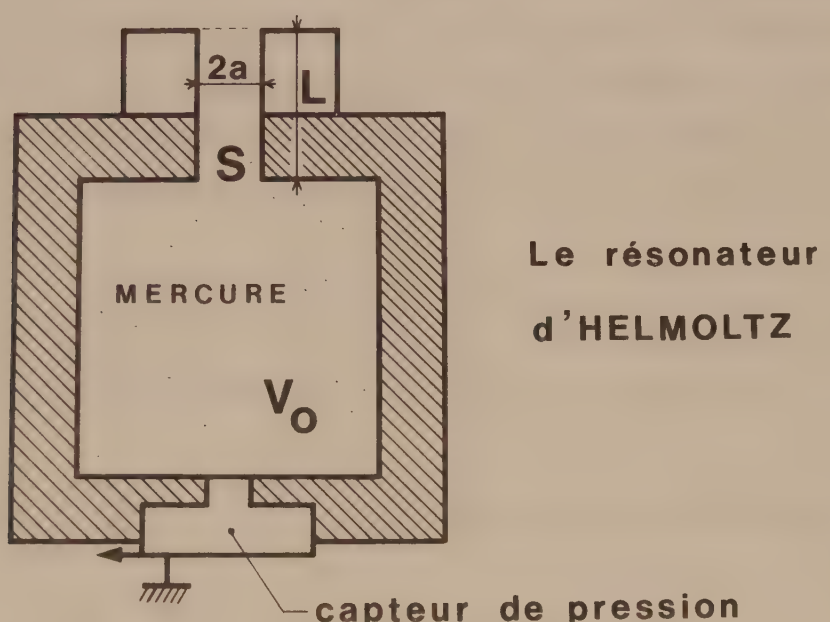


Figure 4

Le résonateur d'Helmoltz (figure 4) est constitué d'une cavité de volume V_o de grande dimension, surmontée d'un goulot de longueur L, de section S et de largeur 2a. L'ensemble contient en général de l'air qui peut éventuellement être remplacé par un fluide quelconque.

L'utilisation habituelle de cette cavité résonante est le filtre acoustique, analogie des filtres électriques. Nous allons montrer que l'ensemble se comporte comme un ressort (cavité) auquel serait accroché une masse (masse de fluide

dans le goulot).

La masse de fluide en vibration est [14]

$$m = S.(L + \delta).\rho$$

δ est une correction apportée sur la longueur car la masse de fluide en vibration ne correspond pas exactement à L. La valeur de δ est en général déterminée expérimentalement.

Pour que l'ensemble puisse fonctionner dans les conditions indiquées, on doit pouvoir négliger les phénomènes de propagation, la longueur d'onde du signal émis doit donc être grande vis à vis des dimensions du résonateur. Dans le cas général du résonateur d'Helmoltz à air, on peut négliger la déformation de la cavité, mais il n'en est plus de même dans le cas particulier des résonateurs à liquide.

Il faut d'abord évaluer l'élasticité de l'ensemble cavité-fluide :

- Supposons la cavité indéformable, seul le fluide se comprime

$$\frac{1}{\varepsilon_1}.dP = -\frac{dV_1}{V_0}$$ ε_1 module d'élasticité du fluide.

- Appliquons la même pression dP et supposons la cavité déformable et le fluide incompressible, il vient

$$\frac{1}{\varepsilon_2}.dP = -\frac{dV_2}{V_0}$$ par analogie avec l'écriture

précédente, ε_2 est le module d'élasticité de la cavité qui dépend entre autre du module d'Young du matériau qui la constitue.

- Lorsque les deux phénomènes se superposent, on peut écrire en ajoutant les deux équations précédentes

$$\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right).dP = -\frac{(dV_1 + dV_2)}{V_0} = -\frac{dV}{V_0}$$

On pose

(18) $\frac{1}{\mathcal{E}} = \frac{1}{\mathcal{E}_1} + \frac{1}{\mathcal{E}_2}$ où $\mathcal{E}$ représente l'élasticité de

l'ensemble fluide-cavité.

(19) $\frac{1}{\mathcal{E}} \cdot dP = - \frac{dV}{V_0}$

En appliquant cette équation à des mouvements de faible amplitude, on peut écrire, si y(t) est l'élongation et f(t) une force d'excitation

(20) $\frac{1}{\mathcal{E}.S} \cdot m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{S}{V_0} \cdot y = \frac{f(t)}{\mathcal{E}.S}$

C'est l'équation d'un système oscillant, dont la pulsation propre est

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{S \cdot \mathcal{E}}{V_0 \rho (L+\delta)}}$$

Par définition, la célérité du son dans le fluide précédent est telle que

$$\rho \cdot c_0^2 = \mathcal{E}_1$$

Par analogie, on peut écrire

$$\rho \cdot c^2 = \mathcal{E}$$

$$\omega_0^2 = \frac{S \cdot c^2}{V_0 \cdot (L+\delta)}$$

Il vient

(21) $\omega_0 = c \cdot \sqrt{\frac{S}{V_0 \cdot (L+\delta)}}$

Il faut noter que cette pulsation propre est indépendante de la densité du fluide qui se trouve dans la cavité.
La valeur du paramètre C appelle une remarque, en effet

$$C^2 = \frac{\mathcal{E}}{\rho} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\mathcal{E}_1 \cdot \mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2} = C_0^2 \cdot \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}$$

C correspond ici à la vitesse de propagation d'une onde plane dans une cavité déformable du type précédent, dans tous les cas, C est inférieur à C_0.
Pour une fréquence de résonance élevée, il est nécessaire d'avoir une célérité C aussi proche que possible de C_0, un matériau très dur $\left(\mathcal{E}_2 \gg \mathcal{E}_1 \right)$ doit donc constituer les parois de la cavité. On remarque que les imperfections d'origine physique tendent toutes à abaisser la fréquence de résonance.

Les paramètres (vitesse, amplitude) de ce résonateur d'Helmoltz seront étudiés en mesurant la pression différentielle qui règne dans la cavité V_0 en régime sinusoïdal de pulsation ω et à l'aide des dimensions réduites usuelles, on obtient

$$\Delta P = - \frac{c^2 \cdot S}{u_0^2 \cdot V_0} \cdot a \cdot y \qquad \text{avec} \qquad c^2 \cdot S = \omega_0^2 \cdot V_0 \cdot (L + \delta)$$

donc

$$\Delta P = - \omega_0^2 \cdot \left(\frac{L + \delta}{a} \right) \cdot y \tag{22}$$

Si U est la vitesse moyenne réduite dans le goulot, on a

$$U = i \omega \cdot y \qquad \text{en régime sinusoïdal.}$$

Il vient

$$\Delta P = i \omega_0^2 \cdot \frac{(L + \delta)}{a \omega} \cdot U \tag{23}$$

Les formules (22) et (23) montrent que la connaissance de $(L+\delta)$ ainsi que de la géométrie du résonateur, permet de caractériser son fonctionnement.

3.2. - Le résonateur magnétohydrodynamique

Le résonateur magnétohydrodynamique fonctionne selon le principe du résonateur d'Helmoltz.

Il est constitué d'une cavité de volume V_o contenant un liquide électroconducteur, ici le mercure, l'ensemble est surmonté d'un goulot à parois isolantes, ainsi que d'une pompe électromagnétique du même type que celle étudiée au début de ce chapitre (figure 4). La pompe est placée dans un champ d'induction magnétique uniforme et les deux électrodes sont alimentées par une différence de potentiel alternative de pulsation ω .

Les lignes de courant et les lignes équipotentielles de la pompe électromagnétique sont représentées sur la figure 5 et on remarque qu'elles sont sensiblement parallèles au niveau des électrodes, et qu'elles s'incurvent dans le goulot à paroi isolante. L'étude rhéolectrique est réalisée sur papier conducteur et montre que 90 % des lignes de courant restent dans le goulot, donc le champ d'induction magnétique extérieur uniforme a une action efficace sur celui-ci.

Le courant sert d'excitateur au goulot de ce résonateur d'Helmoltz de type particulier, tandis que la cavité apporte à la pompe électromagnétique une force de rappel proportionnelle a son élongation, ce qui lui donne en fait une fréquence de résonance. Ce dispositif a entre autre, pour but d'éliminer l'inertie du fluide contenu dans le corps de pompe à la résonance, ce qui est particulièrement sensible dans le cas du mercure.

Considérons une ligne de courant suivant le trajet $(\mathcal{C})$ et présentant une symétrie par rapport à l'axe Ox (figure 6).

Elle transporte une intensité dI et nous allons calculer la force qui en résulte, soit

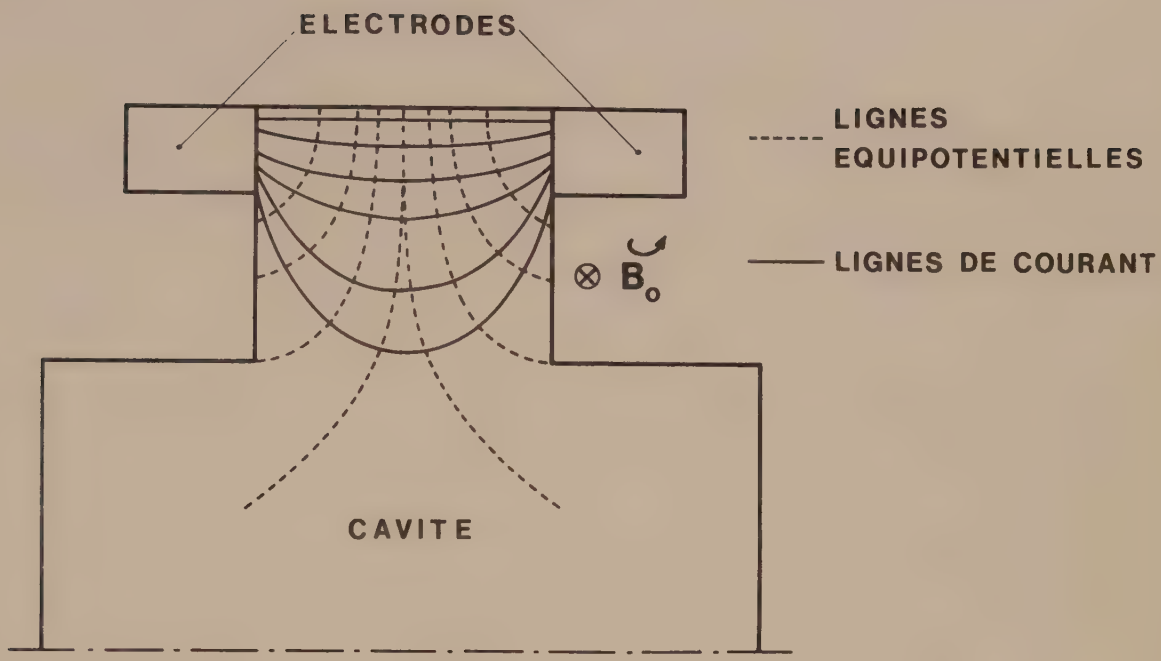


Figure 5

$$d\vec{F} = dI \cdot \int_{(\mathcal{C})} \vec{dl} \wedge \vec{B}_o$$

Les composantes sont

$$dF_x = dI \cdot B_o \cdot \int_{(\mathcal{C})} dy$$

$$dF_y = - dI \cdot B_o \cdot \int_{(\mathcal{C})} dx$$

$$dF_z = 0$$

Soit

$$F_x = B_0 . I . (y_2 - y_1)$$

$$F_y = 0$$

$$F_z = 0$$

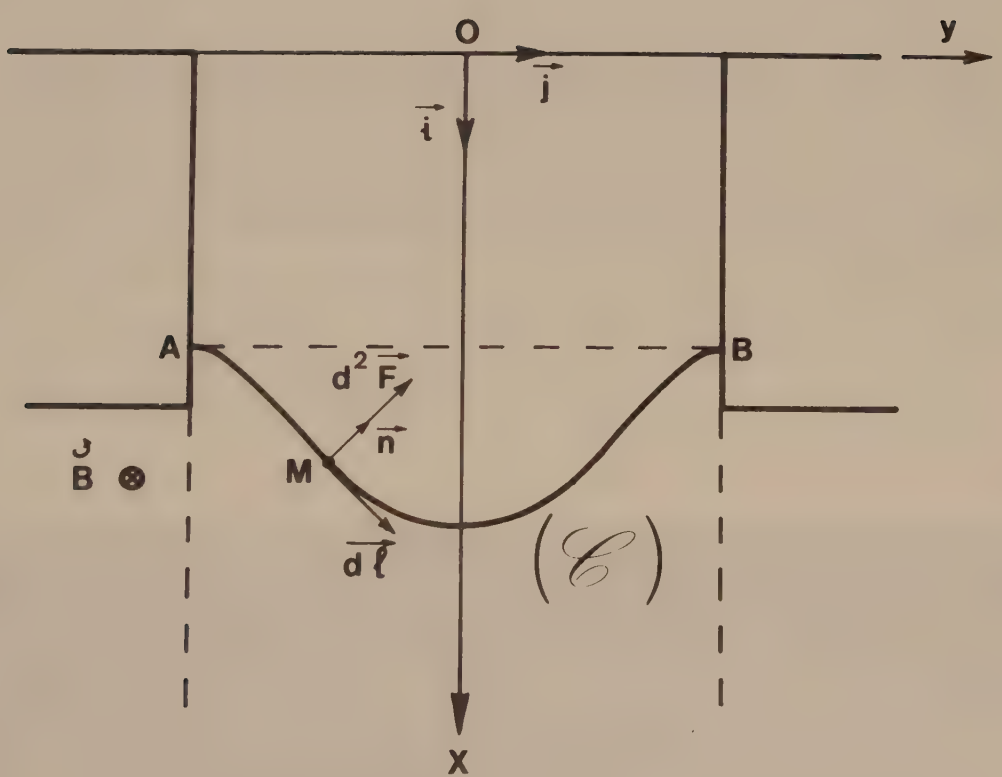


Figure 6

La force résultante est donc indépendante du chemin suivi par les lignes de courant du fait de l'existence d'un plan de symétrie du résonateur. Il faut donc choisir un modèle de ligne de courant, les plus simples sont des droites parallèles et le tracé rhéoélectrique montre que cette hypothèse est valable dans la moitié supérieure du résonateur, mais comme la force de Laplace est indépendante du trajet suivi par le courant, on admet que le modèle linéaire peut décrire correctement le fonctionnement d'un tel système.

Nous disposons ainsi d'un générateur de vitesse ayant une fréquence propre.

Il existe déjà des générateurs d'onde du type électromécanique (haut-parleur), piézoélectrique (quartz), ou basé sur le principe de l'électrostriction.

Le générateur d'ondes magnétohydrodynamique ainsi constitué complète cette liste.

3.3. - Description des dispositifs expérimentaux

3.3.1. - La pompe électromagnétique

La pompe électromagnétique rectangulaire est constituée en acier Inox et les électrodes d'alimentation sont isolés électriquement par une mince couche de matière plastique. La section de l'ouverture est de 4 x 24 mm tandis que la longueur est de 6,5 mm.

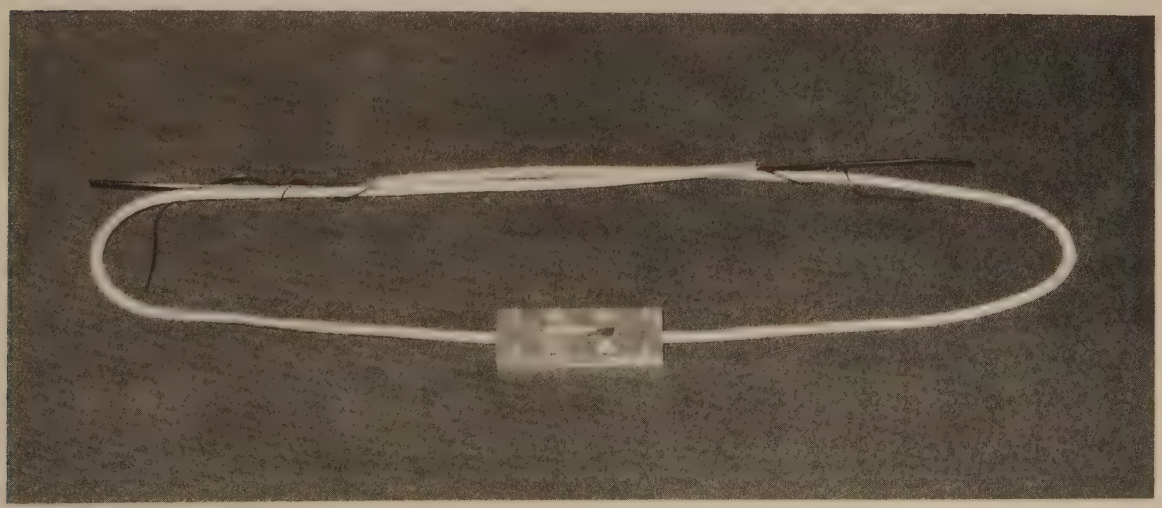


Figure 7

La figure 7 représente la pompe électromagnétique avec ses fils d'alimentation. L'expérience montre qu'il est nécessaire de choisir l'acier Inox afin d'éviter des déformations mécaniques, génantes pour les mesures.

3.3.2. - La cavité du résonateur

La géométrie n'intervient pas dans le fonctionnement du résonateur, les cavités choisies sont rectangulaires ou cylindriques (figure 8).

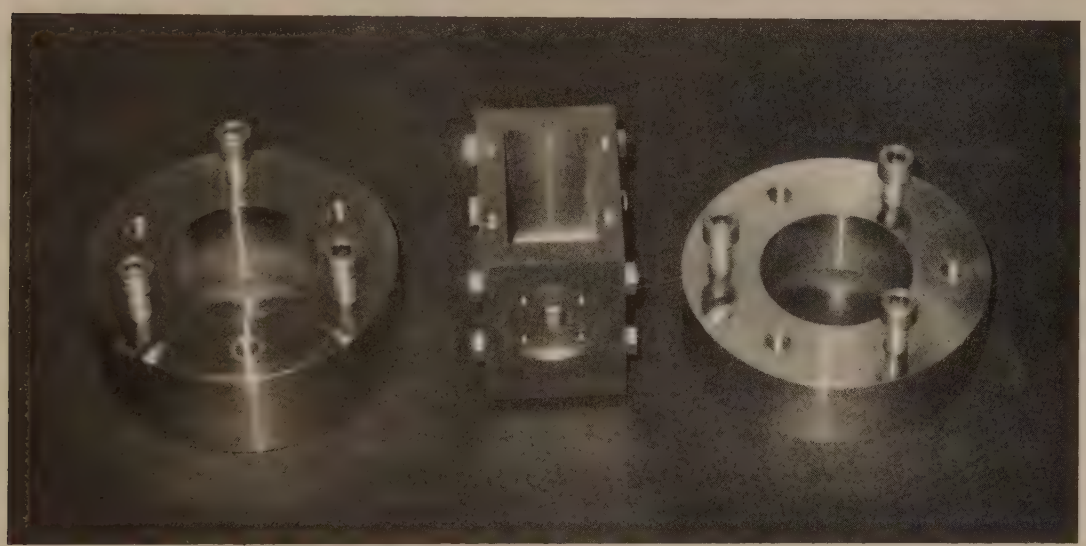


Figure 8

Ici encore, l'acier Inox est nécessaire pour constituer les parois de ces cavités qui doivent se déformer le moins possible, cela explique les dimensions suivantes :

- Diamètre de l'ouverture 52 mm
- Epaisseur des parois 30 mm

Cette réalisation permet d'obtenir des fréquences de résonance relativement élevées avec des déformations de paroi assez faibles.

3.3.3. - Le résonateur

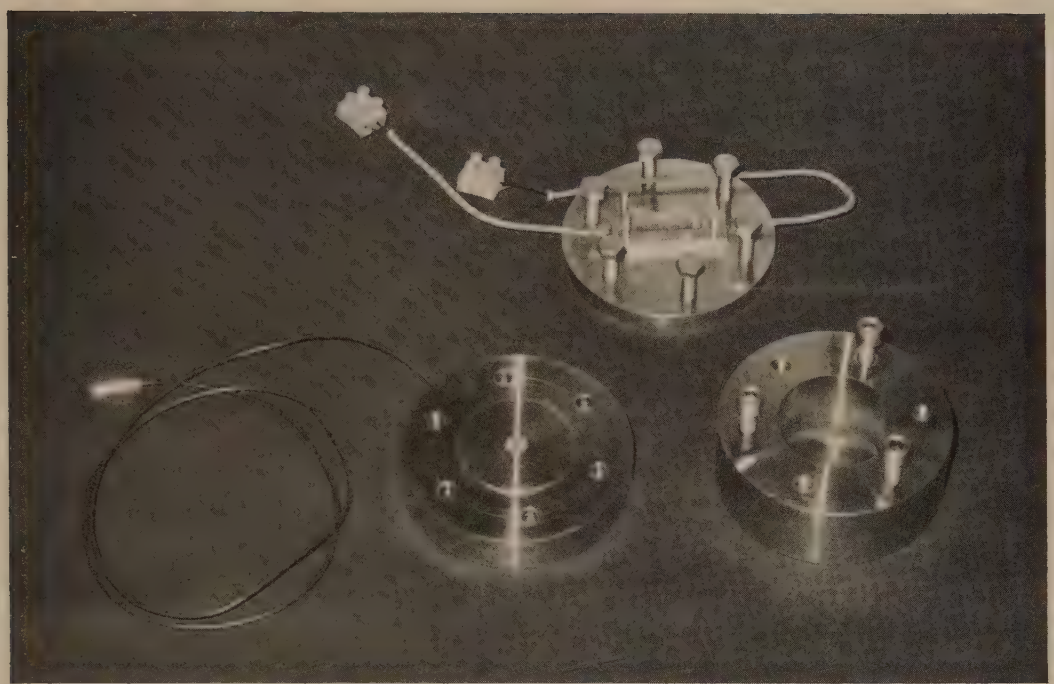


Figure 9

La figure 9 montre l'ensemble des éléments du résonateur :

- La pompe électromagnétique est fixée sur un couvercle qui est celui de la cavité.
- Ce couvercle est fixé aux parois cylindriques par 6 boulons.
- A la partie inférieure est boulonné le fond de la cavité qui comprend le capteur de pression piézoélectrique.

3.3.4. - L'induction magnétique

Pour créer l'induction magnétique, nous utilisons ici un électroaimant dont les pièces polaires ont été conçues spécialement pour le résonateur.

On obtient des performances comparables à celles d'un bon aimant permanent (aimant de magnétron par exemple) qui est largement suffisant pour faire fonctionner ce type de résonateur. L'emploi d'un électroaimant permet d'étudier l'évolution des paramètres en fonction de l'induction magnétique.

3.3.5. - Les appareils électroniques utilisés

Le capteur de pression étalonné ainsi que son système d'enregistrement sont identiques à ceux utilisés dans la première partie.

L'ensemble comprend en outre :

- un générateur BF 10 Hz - 10 M Hz
- un générateur de fonction pour la modulation de fréquence.
- un amplificateur de puissance (10 Watts)
- un fréquencemètre.

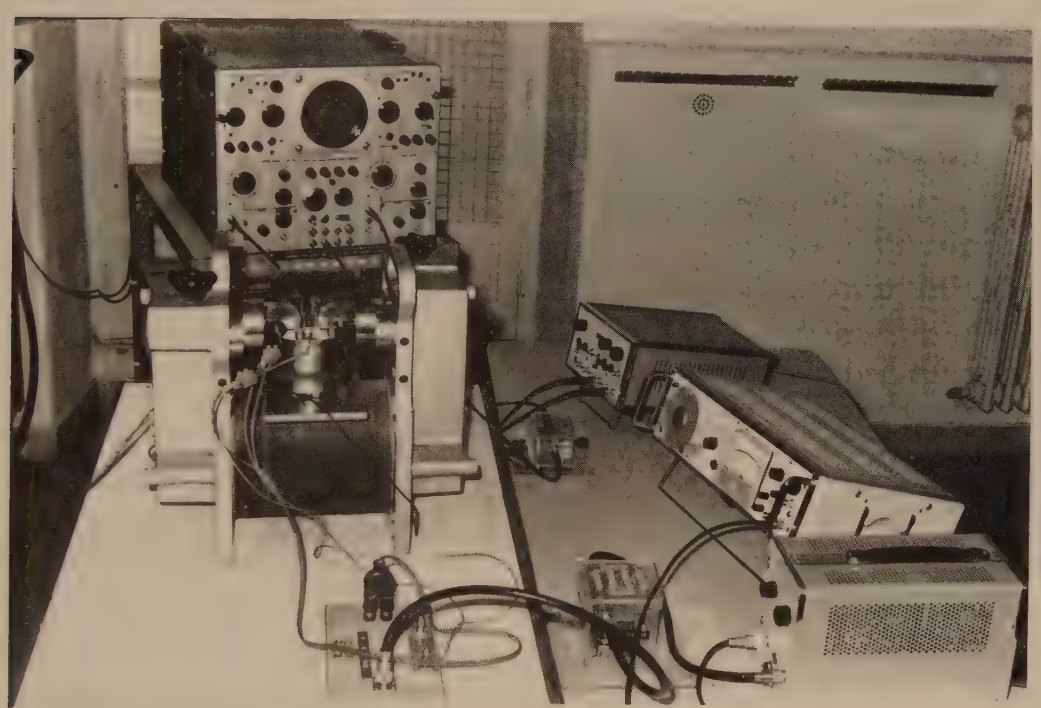


Figure 10

La figure 10 représente l'ensemble des appareils électroniques ainsi que le résonateur en place dans l'entrefer de l'électroaimant. Le résonateur est alimenté par un courant de 2 ampères sous très basse tension. Les fréquences employées sont comprises entre 100 Hz et 3.000 Hz et sont mesurées au fréquencemètre à affichage numérique.

3.4. - Etude expérimentale - Comparaison théorie-expérience

Un capteur mesure la pression dans la cavité de volume V_0. Les relations (22) et (23) indiquent que la connaissance de la pression dans la cavité permet d'en déduire l'amplitude et la vitesse moyenne du fluide en vibration, en effet

$$(24) \qquad y = \frac{a}{\omega_0^2 \cdot (L+\delta)} \cdot \Delta P$$

$$(25) \qquad U = \frac{i\omega a}{\omega_0^2 \cdot (L+\delta)} \cdot \Delta P$$

On remarque d'après les relations (24) et (25) qu'il est nécessaire de connaître la longueur efficace $(L+\delta)$ ainsi que la pulsation propre.

3.4.1. - Détermination de la pulsation propre ω_0

La pulsation propre est obtenue en recherchant le maximum d'amplitude de la réponse du capteur piézoélectrique relevant la pression dans la cavité en faisant varier la fréquence du courant d'alimentation. Pour le résonateur utilisé, on mesure une fréquence de résonance de

$$N_0 = 824 \text{ Hz}$$

soit une pulsation propre en dimension réduite

$$\omega_0 = 3,15$$

3.4.2. - Détermination de la longueur efficace $L+\delta$

La pulsation propre calculée est (21)

$$\omega_0 = c \cdot \sqrt{\frac{S}{V_0 (L+\delta)}}$$

Il suffit de donner à L une petite variation autour d'une position donnée, en différenciant d'abord et en linéarisant ensuite

$$\frac{\Delta N_0}{N_0} = \frac{\Delta \omega_0}{\omega_0} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta L}{(L+\delta)}$$

$$L + \delta = \left| \frac{N_0}{2} \cdot \frac{\Delta L}{\Delta N_0} \right|$$

On effectue la mesure de la variation ΔL à l'aide d'une vis micrométrique, tandis que celle de N_0 est faite au fréquencemètre.

$\Delta N_0 / N_0$ est de l'ordre de 1 % $(\Delta N_0 = 10 Hz)$ ce qui est mesurable avec une bonne précision, il en est de même pour $\Delta L / (L+\delta)$

Nous obtenons le résultat suivant

$$L + \delta = 2 . 10^{-2} m$$

$$\delta = 0,34 . 10^{-2} m$$

$$L = 1,66 . 10^{-2} m$$

Il est intéressant de comparer les fréquences propres théorique et expérimentale. La valeur calculée sans tenir compte de la déformation de la cavité est N_0 = 1 560 Hz, et la mesure correspondante 824 Hz. Ce résultat est prévisible car le mercure, en tant que métal liquide, est aussi difficile à comprimer que les autres métaux, l'élasticité apparente est sensiblement partagée entre la déformation de la cavité et la compression du mercure.

On remarque ici l'analogie entre la déformation de la cavité d'un tuyau contenant un liquide dans lequel se propage une onde plane. La célérité de l'onde ainsi obtenue est plus faible que la célérité du son dans le même milieu défini. Les approches théoriques de cette déformation sont encore très imprécises, c'est pourquoi nous nous bornons ici à une étude purement expérimentale.

3.4.3. - La réponse du capteur piézoélectrique

Afin d'étudier directement la bande passante du résonateur nous travaillons en modulation de fréquence linéaire dans la gamme 400 Hz - 3.000 Hz comprenant la résonance.

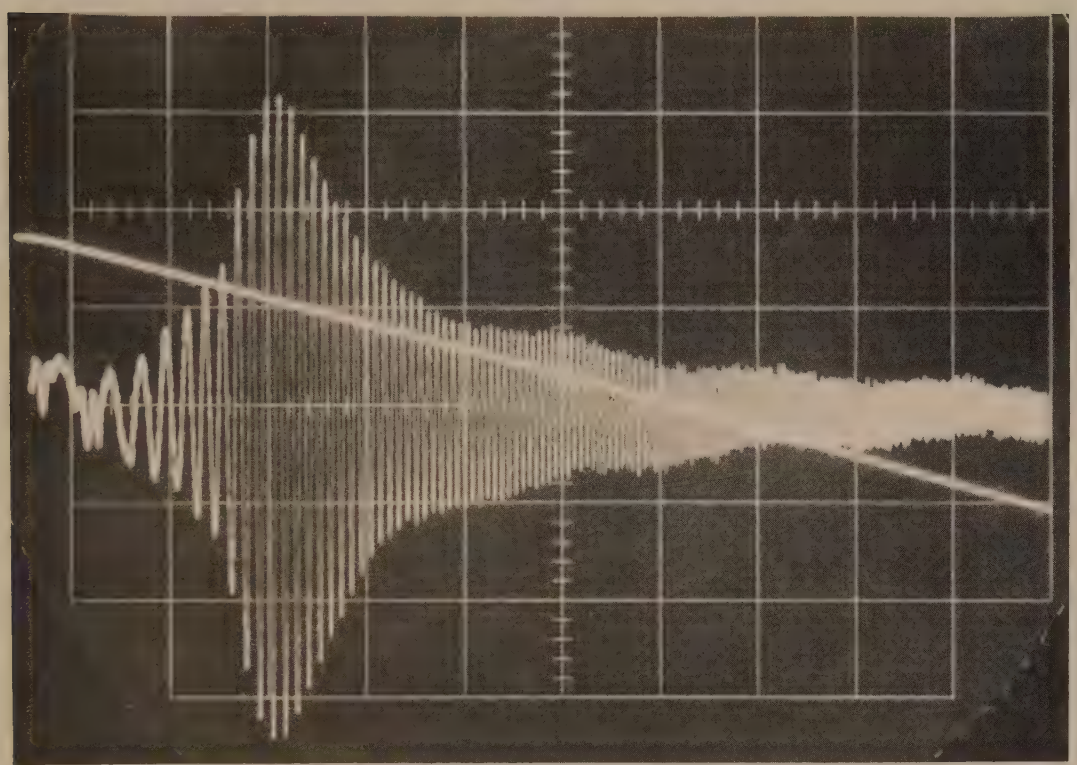


Figure 11

La figure 11 illustre la réponse du capteur de pression dans la gamme de fréquence précédemment définie. Le trait rectiligne figure l'échelle de fréquence linéaire.

Dans la première partie, l'étude de ce capteur piezoélectrique a montré que la réponse en régime sinusoïdal n'est pas tout à fait linéaire, il faut multiplier la valeur de la réponse par la fonction de transfert suivante

$$\frac{\omega . \tau}{\sqrt{1 + \omega^2 . \tau^2}}$$

ω étant la pulsation utilisée et τ la constante de temps du capteur et de son système d'amplification

La bande passante obtenue à la figure 11 ne correspond pas directement en fait à la pression qui règne dans la cavité.

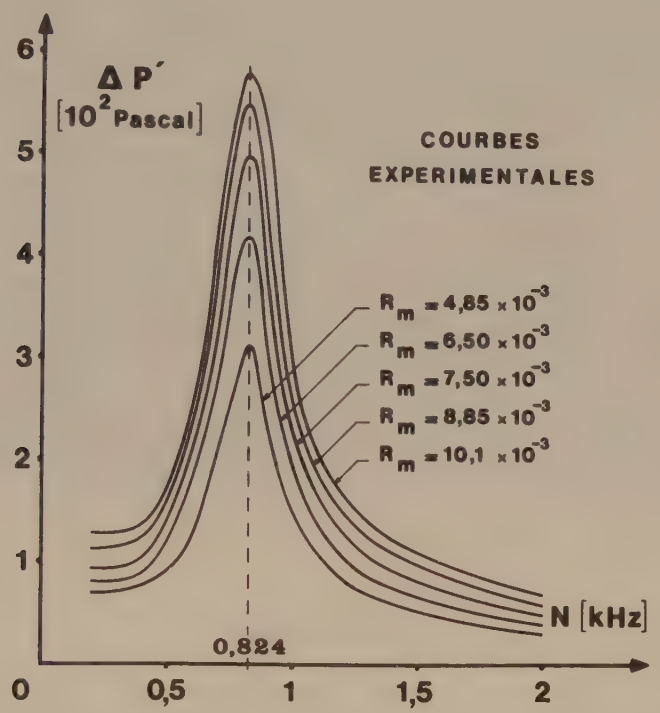


Figure 12

Après correction par la fonction de transfert, la figure 12 représente la valeur de la pression qui règne dans la cavité pour différentes valeurs du nombre de Reynolds magnétique. On peut remarquer la limitation de l'amplitude à la résonance par la présence d'un amortissement que l'étude du régime impulsionnel fera mieux apparaître .

3.4.4. - Le régime impulsionnel

Le résonateur est alimenté dans ce cas par des signaux carrés de très basse fréquence (10 Hz environ). A chaque montée ou descente du courant, il se produit une impulsion.

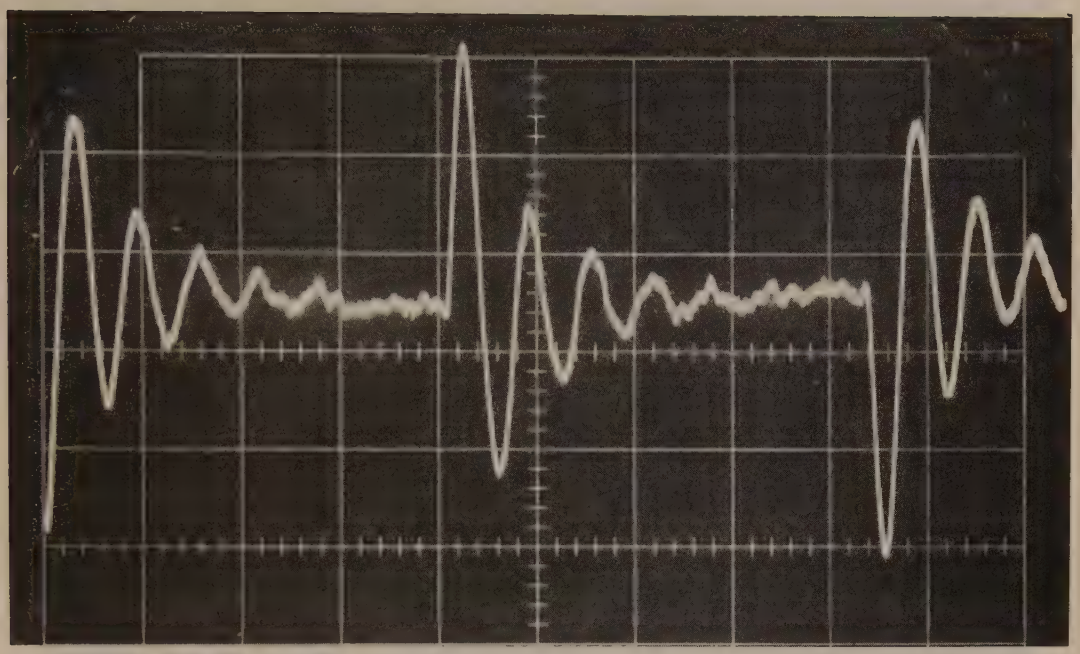


Figure 13

Le résonateur oscille librement, la figure 13 illustre la succession de 3 impulsions, et la fréquence propre de l'autoscillation du système correspond à celle qui a été déterminée précédemment.

La figure 14 montre le détail des oscillations obtenues sous l'effet d'une impulsion. On peut noter, en outre la présence d'un amortissement relativement important qui trouve son origine dans la viscosité du fluide utilisé, mais surtout dans la déformation de la cavité. L'étude faite sur plusieurs types de résonateur de géométrie et de volume différents ne fait pas apparaître une influence sensible de la fréquence propre sur le coefficient d'amortissement.

3.4.5. - Vitesse et amplitude - Résultats expérimentaux

Les figures 15 et 16 représentent respectivement la vitesse et l'amplitude moyenne de la masse vibrante du résonateur. Les valeurs numériques obtenues sont faibles et acoustiques, en effet une élongation de 1/10mm correspond à une

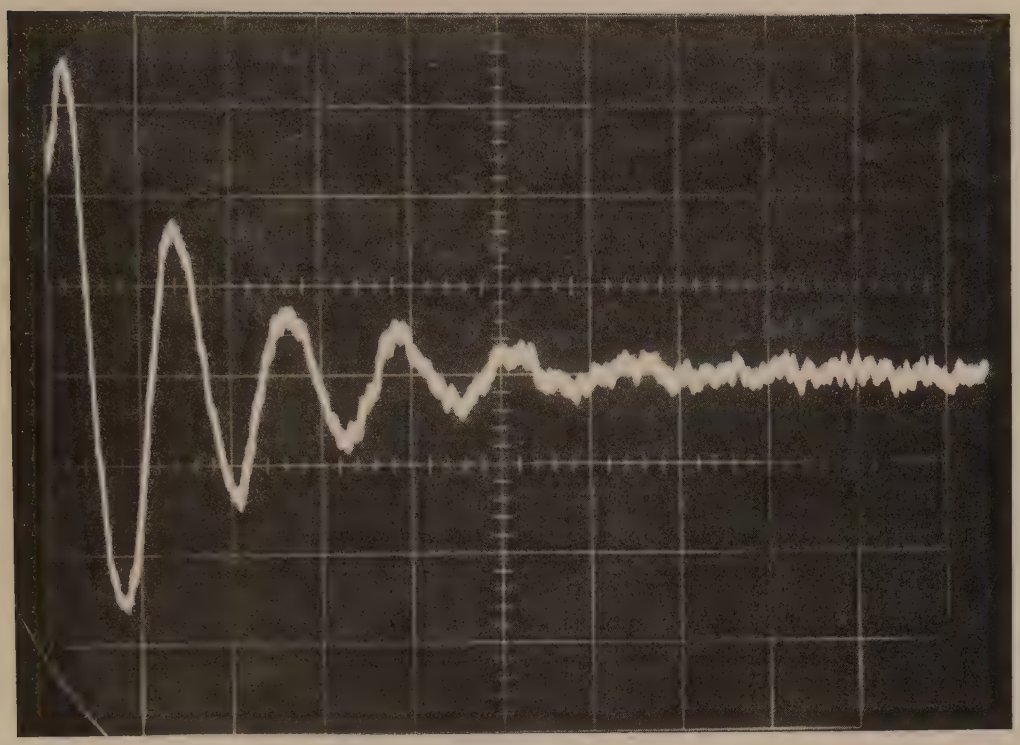


Figure 14

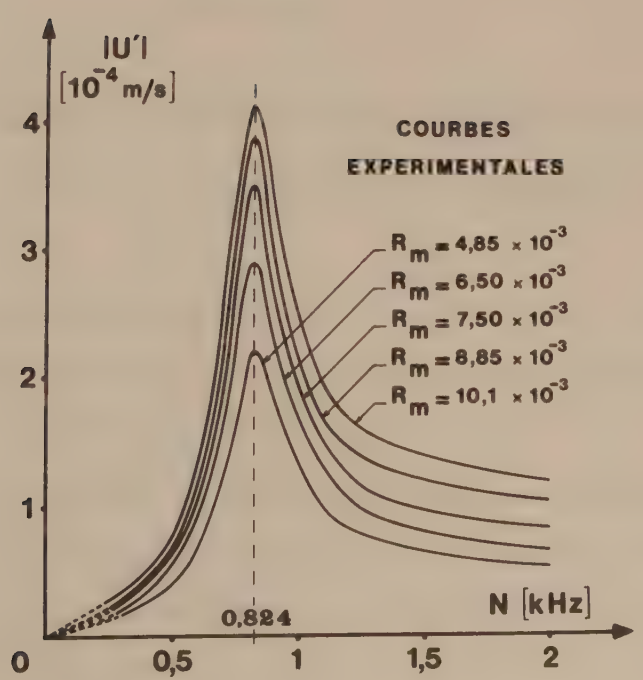
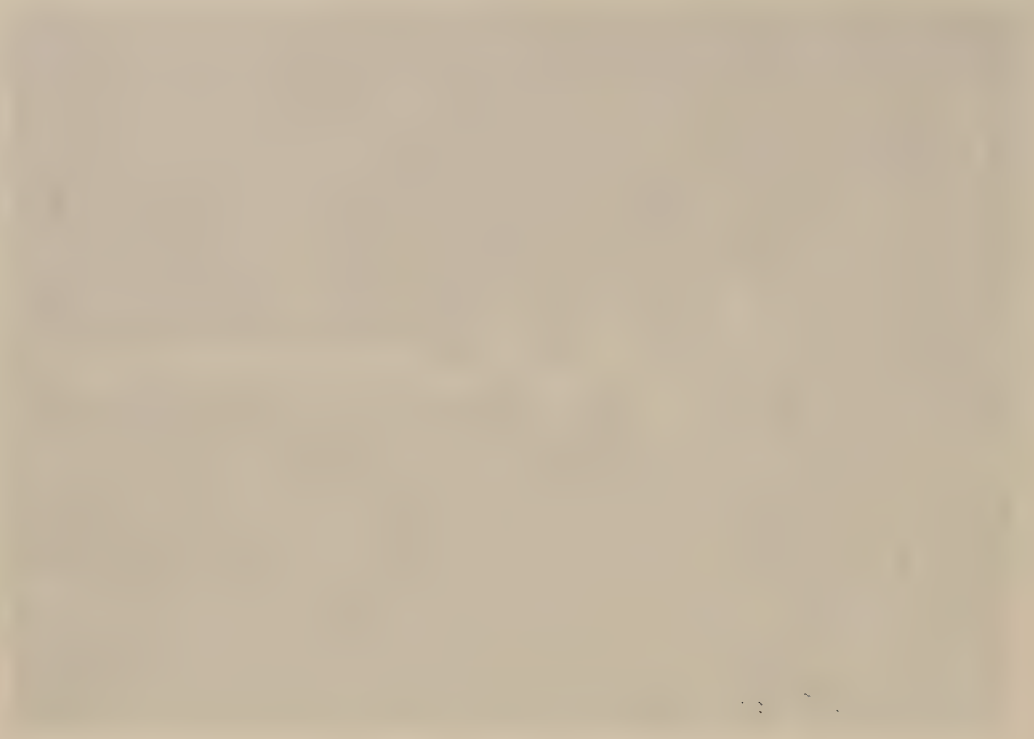


Figure 15



variation de pression de 10 atmosphères dans la cavité, ce qui confirme le fait que, pour vaincre l'inertie du mercure, une force de rappel très importante est nécessaire

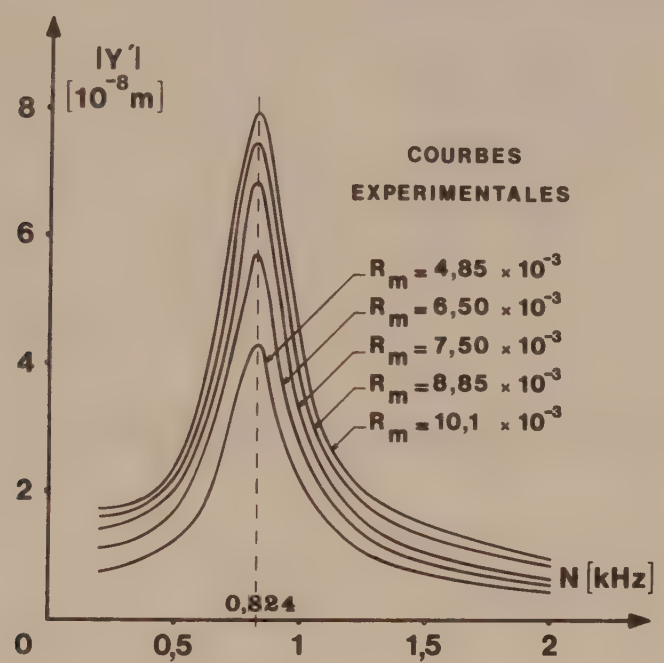


Figure 16

3.4.6. - Comparaison des résultats expérimentaux avec la théorie

Les figures 17, 18 et 19 comparent les résultats expérimentaux et théoriques.

La pression est obtenue à l'aide de la fonction de transfert tandis que la vitesse et l'amplitude sont déterminées par les relations (24) et (25) à partir de la pression fournie par le capteur.

La théorie simplifiée ne tenant pas compte de l'amortissement entraine, en conséquence, un décalage des courbes expérimentales vers les fréquences croissantes. On remarque, en outre, que les résultats expérimentaux sont en général d'amplitude inférieure aux valeurs calculées, toutes les lignes de courant

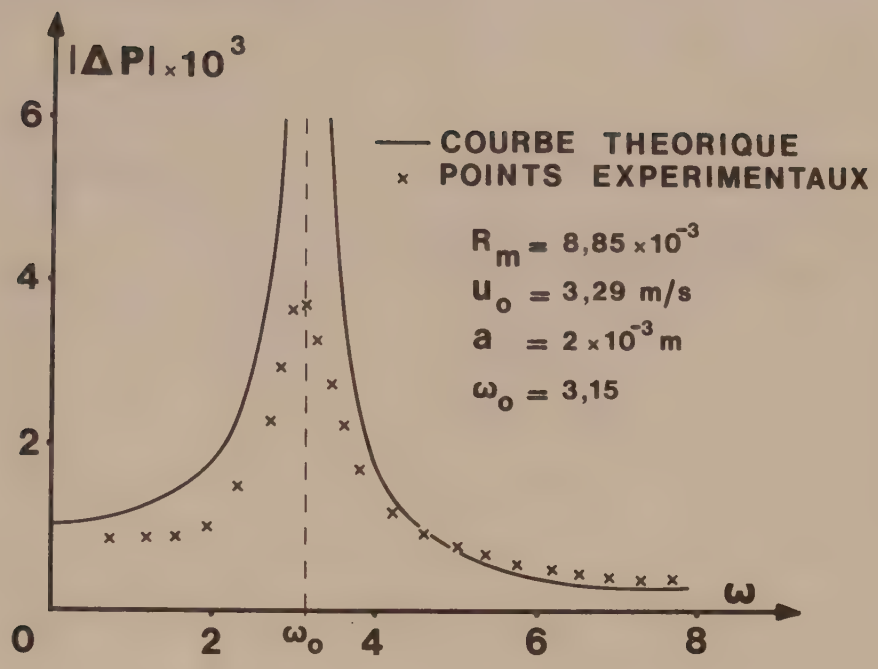


Figure 17

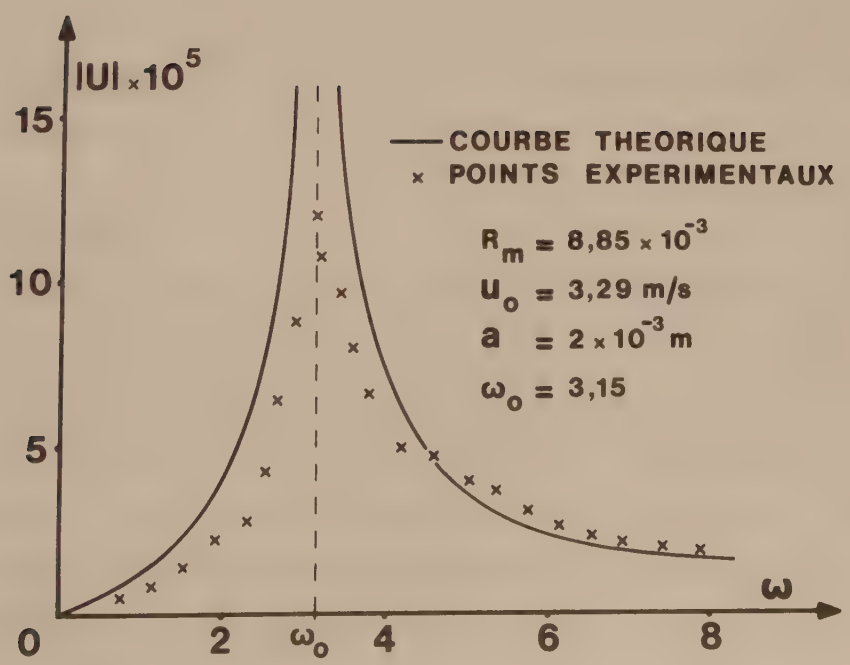


Figure 18

ne traversent pas la pompe électromagnétique, certaines se perdent dans la masse de fluide contenue dans la cavité.

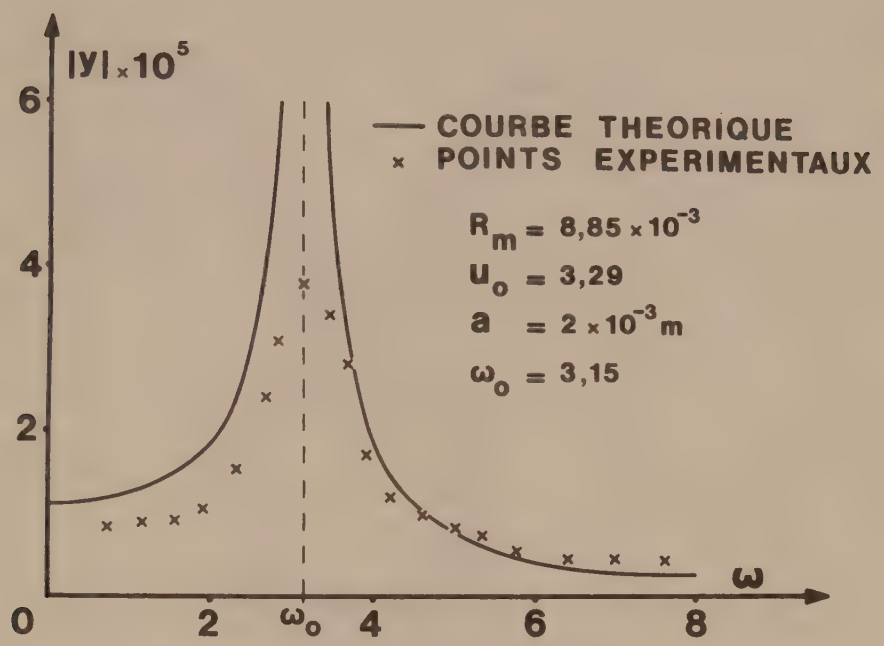


Figure 19

La concordance de la théorie et de l'expérience est convenable, les écarts qui apparaissent s'expliquent par la théorie simplifiée utilisée et par les réalités physiques.

3.5. - Conclusion

Le principal inconvénient des pompes électromagnétiques est leur faible performance, il faut une intensité électrique relativement importante pour une faible pression obtenue. L'utilisation de la pompe électromagnétique en régime instationnaire ajoute en outre l'inertie du fluide, compensée ici par l'adjonction d'une cavité résonante, on conçoit ainsi un résonateur d'Helmoltz magnéto-hydrodynamique. L'étude expérimentale met en évidence un fonctionnement correct du système.

4. UTILISATION DE CE RESONATEUR EN GENERATEUR DE VIBRATIONS

4.1. - Théorie

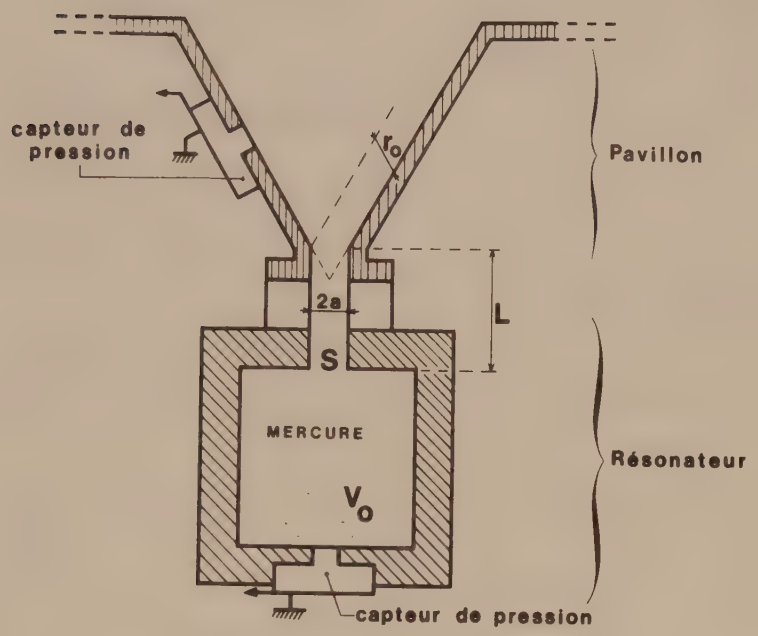


Figure 20

Pour émettre, on utilise un pavillon en supposant que le milieu extérieur a une impédance acoustique intrinsèque.

L'équation de propagation du potentiel des vitesses dans le pavillon est donnée par l'équation de Webster, soit

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \cdot \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{S'(r)}{S(r)} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]$$

S(r) étant la section du pavillon à la distance r.

Les calculs sont effectués à partir des valeurs réduites

$$Z = \frac{Z'}{\rho . u_o}$$

impédance acoustique intrinsèque.

$$\phi = \frac{\phi'}{a.u_0}$$ (potentiel des vitesses)

avec : $P = \frac{\partial \phi}{\partial t}$ et : $U = -\frac{\partial \phi}{\partial r}$

4.1.1. - Pavillon de type conique

Pour la section à la distance r, on a

$$S(r) = \Omega . r^2$$

$$S'(r) = 2 . \Omega . r$$ (Ω angle solide de l'ouverture)

L'équation de Webster s'écrit donc

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r.\phi) = c^2 . \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r.\phi)$$

En régime sinusoïdal de pulsation ω, il vient

$$\phi = \frac{A}{r} . e^{i(\omega t - kr)}$$

Il n'y a pas d'onde rétrograde car le pavillon est supposé indéfini, donc

$$P = \frac{\partial \phi}{\partial t} = i\omega . \frac{A}{r} . e^{i(\omega t - kr)}$$

$$U = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{A}{r}\left(\frac{1}{r} + ik\right) . e^{i(\omega t - kr)}$$

Par suite, l'impédance acoustique intrinsèque est :

$$Z = \frac{P}{U} = \frac{\frac{\omega^2 . r^2}{c}}{1 + \left(\frac{\omega r}{c}\right)^2} + i . \frac{\omega . r}{1 + \left(\frac{\omega r}{c}\right)^2}$$

Il apparait que la pression et la vitesse ne sont pas en phase.

4.1.2. - Pavillon de type cylindrique

Si α est l'angle d'ouverture du pavillon, on a

$$S(r) = \alpha . r$$

(par unité d'engergure)

$$S'(r) = \alpha$$

L'équation de Webster , s'écrit ici

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} . \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{c^2} . \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

En régime sinusoïdal de pulsation ω , il vient

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} . \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\omega^2}{c^2} . \phi = 0$$

dont la solution est

$$\phi = \left[A . \ J_0 \left(\frac{\omega r}{c}\right) + B . \ N_0 \left(\frac{\omega r}{c}\right) \right] . e^{i \omega t}$$

Si le pavillon est indéfini, il n'y a pas d'onde réfléchie et

$$\Phi = A.\left[J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) - i N_0\left(\frac{\omega r}{c}\right)\right].\, e^{i\omega t}$$

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = A.\, i\omega.\left[J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) - i.N_0\left(\frac{\omega r}{c}\right)\right].e^{i\omega t}$$

$$U = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -A.\,\frac{\omega}{c}.\left[J_1\left(\frac{\omega r}{c}\right) - i N_1\left(\frac{\omega r}{c}\right)\right].\, e^{i\omega t}$$

L'impédance acoustique intrinsèque en valeur réduite est

$$Z = \frac{P}{U} = \frac{i\,c.\left[J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) - i\,N_0\left(\frac{\omega r}{c}\right)\right]}{-\left[J_1\left(\frac{\omega r}{c}\right) - i\,N_1\left(\frac{\omega r}{c}\right)\right]}$$

4.1.3. - Equation du mouvement

Soit $Z_0 = R_0 + i.X_0$

l'impédance acoustique intrinsèque à l'entrée du pavillon.

Par conséquent

$$P = Z_0.\,U$$

La force agissante est donc

$f = P.S = Z_0.S.U$ et par unité de volume, il vient

$$f^* = \frac{f}{(L+\delta).S} = \frac{P}{(L+\delta)} = \frac{Z_0}{(L+\delta)}.\,U$$

En posant

$$S = \frac{S'}{a^2}$$

$$L + \delta = \frac{L' + \delta'}{a}$$

Ce qui fait apparaitre une impédance volumique

$$Z = \frac{Z_0}{L + \delta} = R + i \cdot X$$

Le système différentiel qui régit le mouvement s'écrit donc

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial z} - (R + i.X)\, U - \frac{k}{i\omega} \cdot U$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{R_M} \cdot \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

En régime sinusoïdal, on a

$$i\omega \cdot u - \frac{\partial B}{\partial z} = -\left[R + i\left(X - \frac{k}{\omega}\right)\right] \cdot U$$

$$i\omega \cdot B - \frac{1}{R_M} \cdot \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

La solution de ce système sans second membre est déjà connue d'après les calculs précédents, il suffit de trouver une solution particulière avec second membre, soit

$$\begin{bmatrix} u \\ \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{i\omega} \cdot \left[R + i\left(X - \frac{k}{\omega}\right) \right] \cdot U \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solution complète est donc

$$u = \left[\frac{I \cdot (a+bi)}{4i\omega \cdot sh(a+bi)} \cdot ch\left[(a+bi)z\right] - \frac{1}{i\omega} \cdot \left[R + i\left(X - \frac{k}{\omega}\right) \right] \cdot U \right] \cdot e^{i\omega t}$$

$$B = \frac{I}{4\, sh(a+bi)} \cdot sh\left[(a+bi) \cdot z\right] \cdot e^{i\omega t}$$

En calculant la vitesse moyenne, il vient

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{+1} u \cdot dz = \left[-\frac{i \cdot I}{4\omega} - \frac{1}{i\omega} \left[R + i\left(X - \frac{k}{\omega}\right) \right] \cdot U \right] \cdot e^{i\omega t}$$

d'où

$$U = \frac{I \cdot e^{i\omega t}}{4 \cdot \left[R + i\left(X + \omega - \frac{k}{\omega} \right) \right]}$$

$$|U| = \frac{I}{4 \cdot \sqrt{R^2 + \left(X + \omega - \frac{k}{\omega} \right)^2}}$$

En définitive

$$u = \frac{I}{4}\left[\frac{(a+bi)}{i\omega . sh(a+bi)} . ch\left[(a+bi).z\right] - \frac{R + i\left(X - \frac{k}{\omega}\right)}{i\omega\left[R + i\left(X + \omega - \frac{k}{\omega}\right)\right]}\right] . e^{i\omega t}$$

$$B = \frac{I}{4\, sh(a+bi)} . sh\left[(a+bi).z\right] . e^{i\omega t}$$

On remarque que seules les grandeurs mécaniques présentent une résonance, tandis que les grandeurs électriques sont inchangées. Nous pouvons calculer la fréquence de résonance, qui est telle que

$$X + \omega = \frac{k}{\omega} \qquad \text{soit}$$

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{X^2 + 4k} - X}{2} \qquad \omega_1 < \omega_0$$

L'impédance acoustique du milieu extérieur a pour effet d'abaisser la fréquence de résonance du résonateur.

La figure 21 montre les différentes vitesses théoriques obtenues suivant le type de pompes électromagnétiques utilisé. La présence d'un milieu extérieur d'impédance acoustique convenable, entraine pour la vitesse, un amortissement. On remarque ici un palier très net de la courbe au voisinage de la fréquence de résonance et malgré l'amortissement, le niveau du signal utile est encore très acceptable.

4.1.4. - Calcul de la pression

Comme précédemment, les performances du résonateur s'établissent en

mesurant la pression qui règne dans la cavité, il est donc intéressant de calculer la pression intérieure ΔP_i en fonction de la pression qui s'établit à l'extérieur ΔP_e.

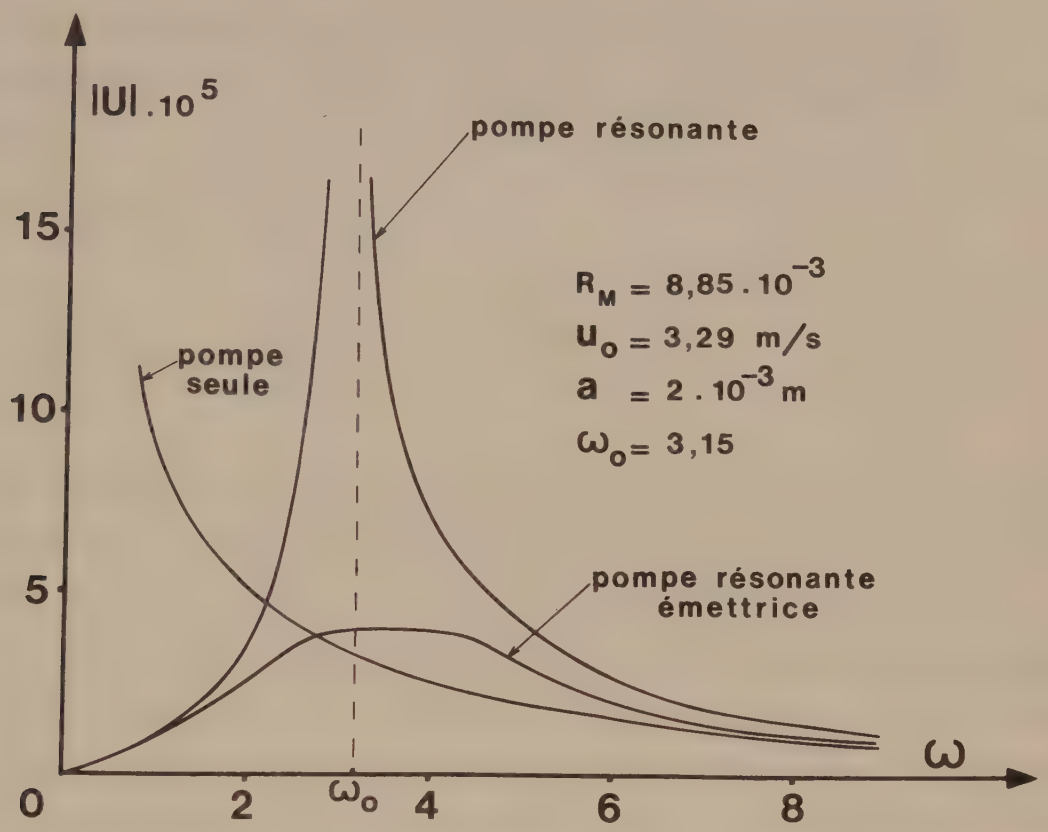


Figure 21

D'après la relation (25), la pression à l'intérieur est

$$\Delta P_i = i \cdot \omega_0^2 \cdot \left(\frac{L+\delta}{a}\right) \cdot \frac{U}{\omega}$$

En utilisant la relation (21), il vient

$$\left|\frac{\Delta P_e}{\Delta P_i}\right| = \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \sqrt{\frac{\nu_0}{\nu_0}} \cdot \frac{|Z_0|}{c}$$

Ce résultat présente une particularité car nous pouvons constater que ce rapport de pression est très favorable dans certaines conditions. Ainsi, lorsque l'angle d'ouverture du pavillon diminue, $|Z_o|$ tend vers C, par ailleurs V_o/v_o a une valeur importante (de l'ordre de 100 en général), car c'est une condition nécessaire pour justifier l'hypothèse de fonctionnement du résonateur d'Helmoltz.

On note aussi qu'à la résonance

$$\left|\frac{\Delta P_e}{\Delta P_i}\right| \longrightarrow \sqrt{\frac{V_o}{v_o}}$$

Le résonateur à mercure n'est pas adapté pour émettre une vibration dans un gaz et, en présence de celui-ci, nous pouvons considérer qu'il fonctionne "à vide" (c'est ce qui a été envisagé dans l'étude précédente) . Par contre , il convient pour émettre dans les liquides, surtout si les milieux intérieurs et extérieurs sont les mêmes car on évite tout contact matériel entre l'émetteur et son milieu. Ce résonateur en général peut fonctionner avec des gaz conducteurs éventuellement maintenus dans une cavité à parois non matérielles (système M.H.D.)

4.2. - Description des dispositifs expérimentaux

4.2.1. - Le résonateur

Pour émettre vers l'extérieur, on dispose sur le résonateur un pavillon de type cylindrique surmonté d'un bac d'expansion de grande capacité. (figure 22). Les expériences sont réalisables avec du mercure en raison de la bonne adaptation des impédances acoustiques. L'onde émise va se propager dans le pavillon et s'amortir dans un bac d'expansion, ce qui limite ainsi au maximum la possibilité d'une onde réfléchie. Les mesures s'effectuent à l'aide de deux capteurs de pression, dont l'un est placé sur la paroi de la cavité résonante, et l'autre sur celle du pavillon. Il est ainsi possible de comparer les performances intérieures en fonction de celles extérieures à la cavité.

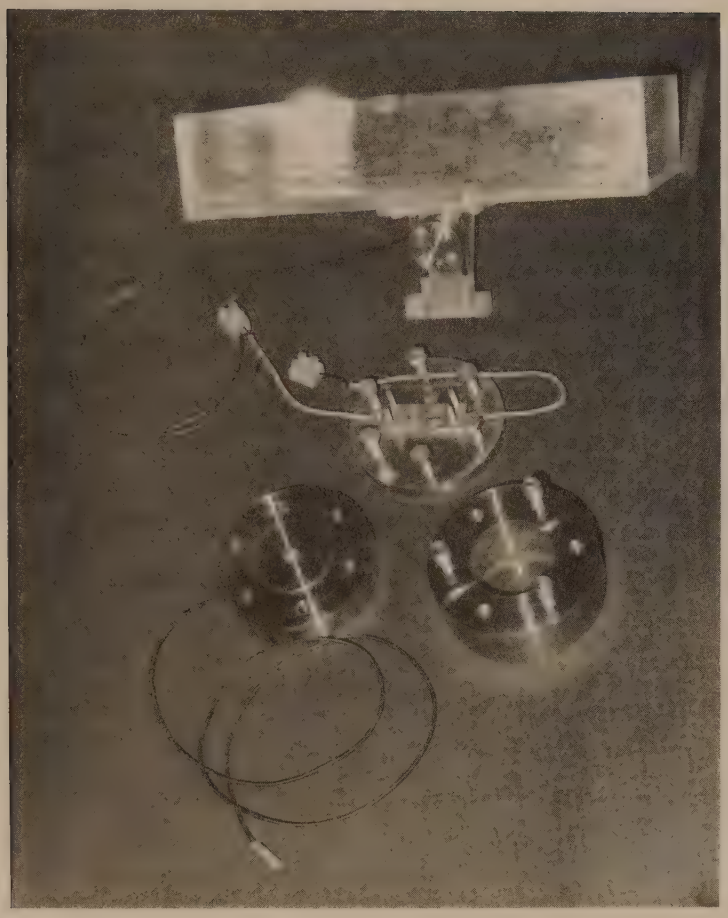


Figure 22

4.3. - Résultats expérimentaux - Comparaison de la théorie avec l'expérience

Le résonateur est du même type que celui étudié précédemment ; seule la géométrie de son goulot a été modifiée afin d'y adapter un pavillon.

Les figures 23 et 24 représentent respectivement la pression régnant dans la cavité et la vitesse du fluide dans le goulot. On peut remarquer que, par rapport aux résultats relatifs au résonateur fonctionnant "à vide", l'amplitude de la pression et de la vitesse subissent un amortissement relativement important, ceci a pour conséquence d'étaler la bande passante de la pression et de la vitesse.

En effet, si on définit le décibel

$$n(dB) = 20 . \log_{10} \left[\frac{\Delta P}{\Delta P_M} \right]$$

$$n(dB) = 20 . \log_{10} \left[\frac{U}{U_M} \right]$$

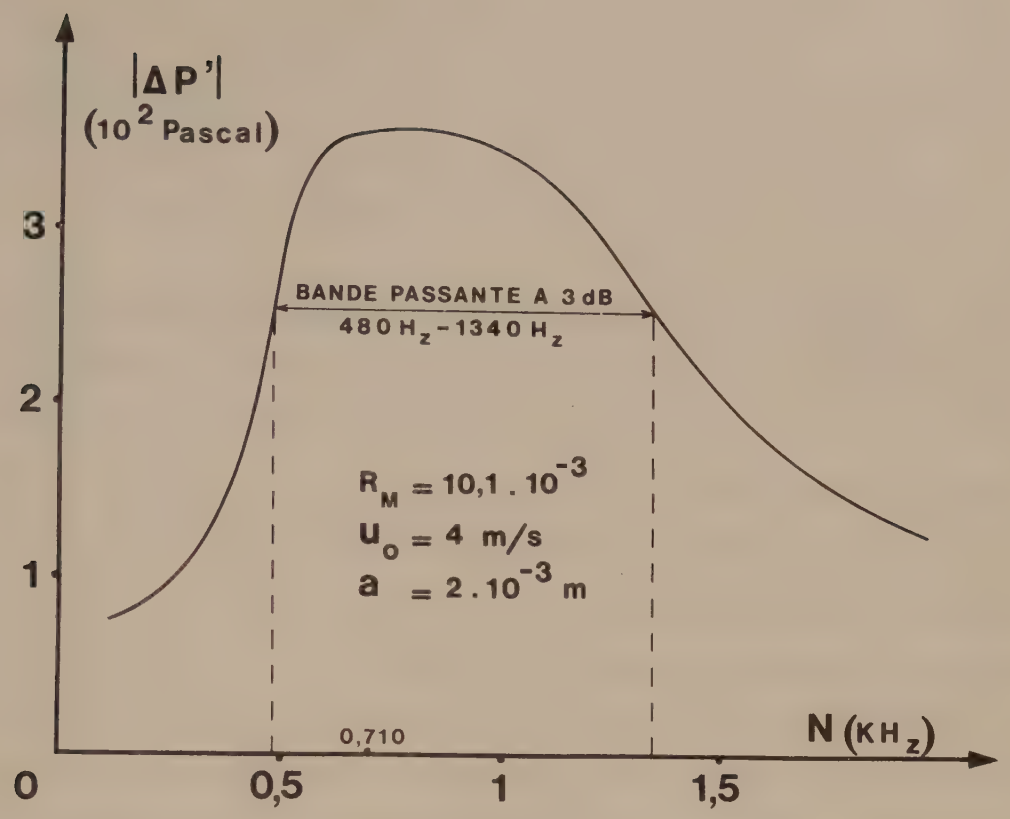


Figure 23

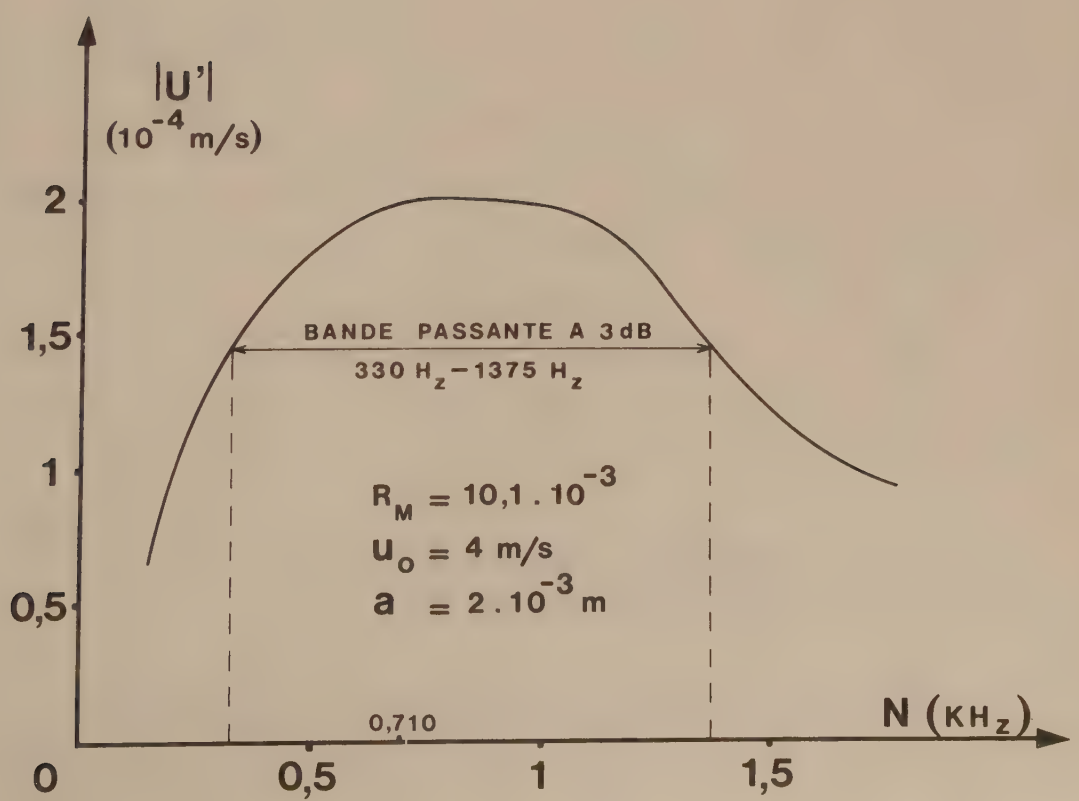


Figure 24

La bande passante à 3 dB relative à ΔP et U peut être mesurée

- pour : 480 Hz - 1 340 Hz
- pour : 330 Hz - 1 375 Hz

La fréquence de résonance étant dans ce cas de 710 Hz, l'amplitude de la réponse de l'appareil subit un affaiblissement de 3 dB dans une très large zone autour de la fréquence de résonance. C'est une propriété que l'on retrouve dans les haut-parleurs dont la bande passante est volontairement étalée afin de rendre la réponse aussi fidèle que possible (figures 23 et 24).

Ce résonateur est particulièrement intéressant pour les basses et très basses fréquences car son principe de fonctionnement n'est pas basé sur un phénomène de propagation comme les émetteurs piezoélectriques par exemple dont la longueur est de l'ordre de grandeur des longueurs d'ondes acoustiques utilisées.Nous obtenons ainsi des appareils de dimensions relativement réduites.

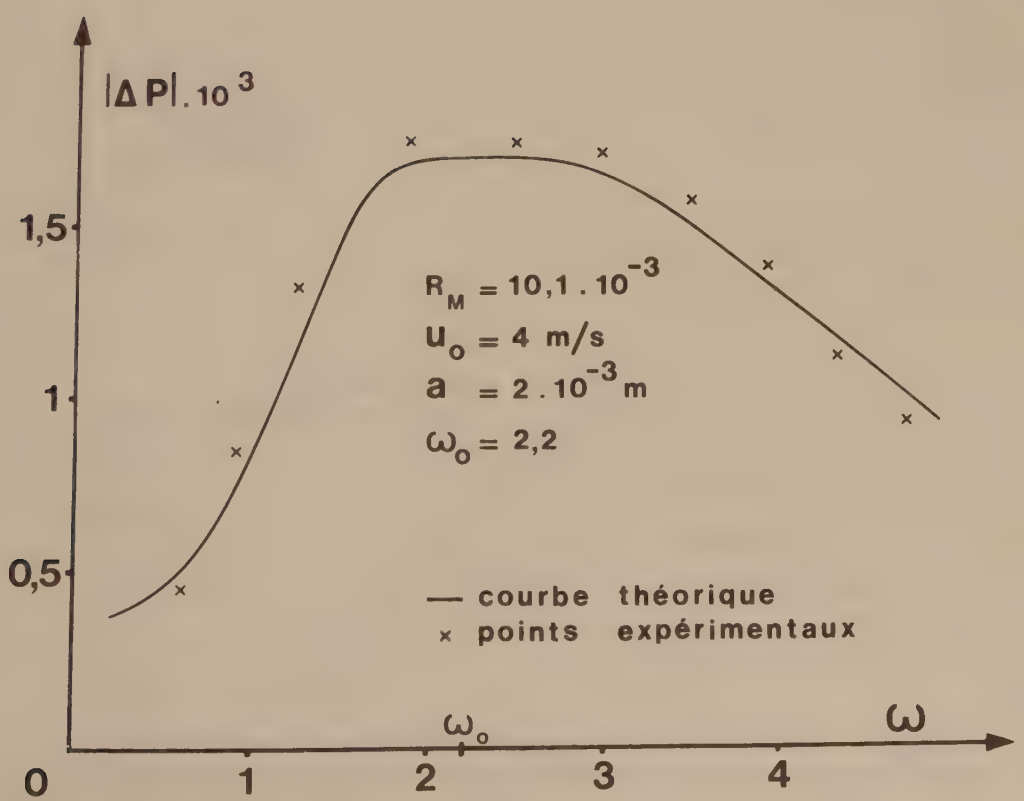


Figure 25

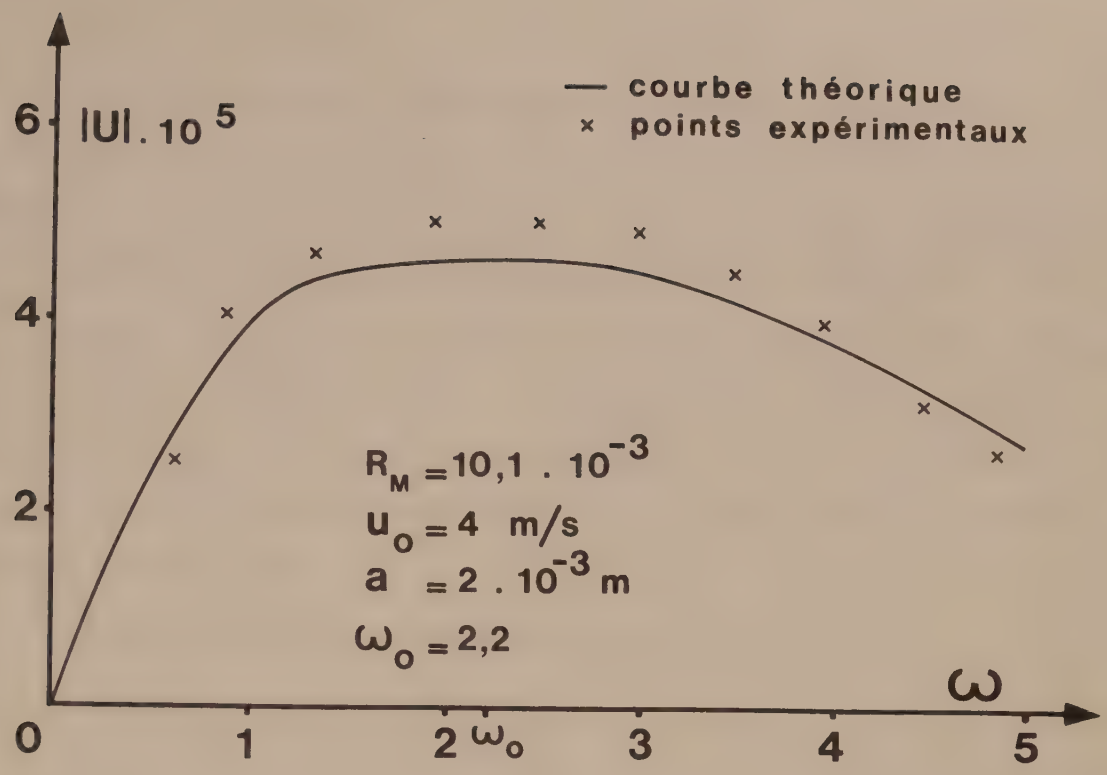


Figure 26

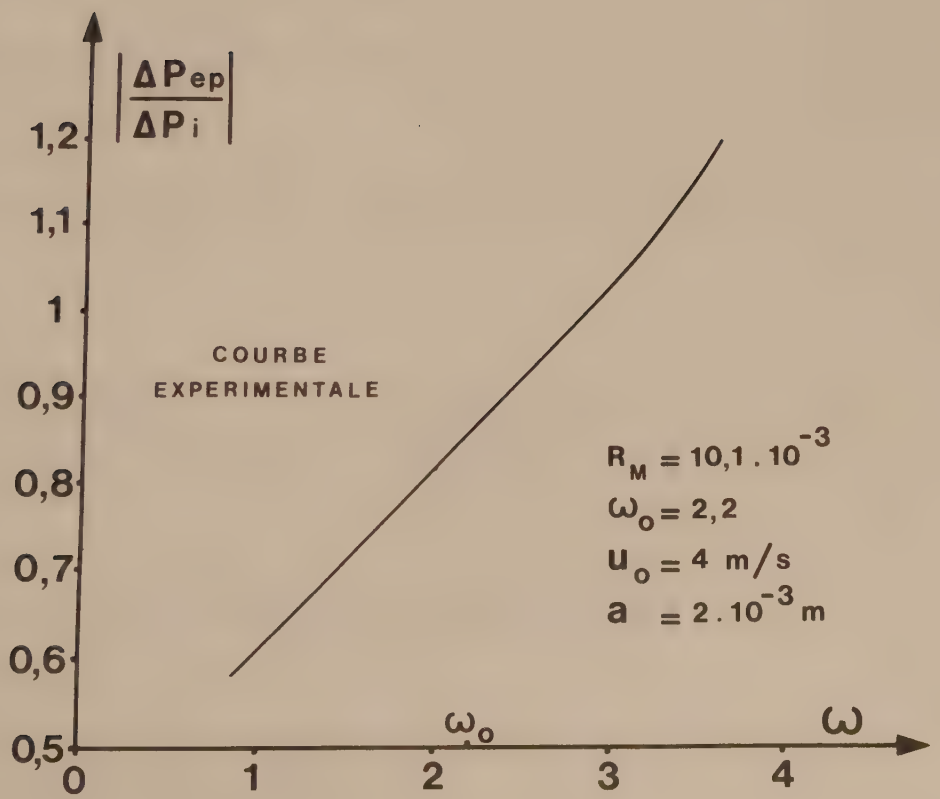


Figure 27

La confrontation entre les résultats théoriques et expérimentaux est assez bonne. On note que la théorie surestime légèrement l'amortissement dû à l'émission de l'onde, on peut attribuer ceci à une tendance que possède la paroi du pavillon à se déformer au passage de l'onde. (figure 25 et 26).

La figure 27 montre le rapport des pressions différentielles qui règnent d'une part, dans le pavillon ΔP_{ep} et dans la cavité ΔP_i. On voit que, malgré l'étalement de l'onde dans le pavillon, ce rapport reste voisin de l'unité pour les fréquences utilisées, ce qui indique une performance correcte de ce générateur de vibration.

4.4. - Schéma électrique équivalent et impédance d'entrée.

4.4.1. - Schéma électrique équivalent

Le système différentiel qui régit le mouvement en régime sinusoïdal est

$$(24) \qquad i\omega . u = \frac{\partial B}{\partial z} - \left[R + i\left(X - \frac{k}{\omega}\right)\right] . U$$

$$(25) \qquad i\omega . B = \frac{1}{R_M} . \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Par intégration de l'équation (24), on obtient

$$i\omega . U = \frac{I}{4} - \left[R + i\left(X - \frac{k}{\omega}\right)\right] . U$$

Soit

$$F = \frac{I}{4} = \left[R + i\left(X + \omega - \frac{k}{\omega}\right)\right] . U$$

En adoptant l'équivalence électromécanique habituelle

Mécanique	Electrique
Vitesse	Intensité
Force	différence de potentiel

L'impédance mécanique du système est

$$Z_M = R + i\left(X + \omega - \frac{k}{\omega}\right)$$

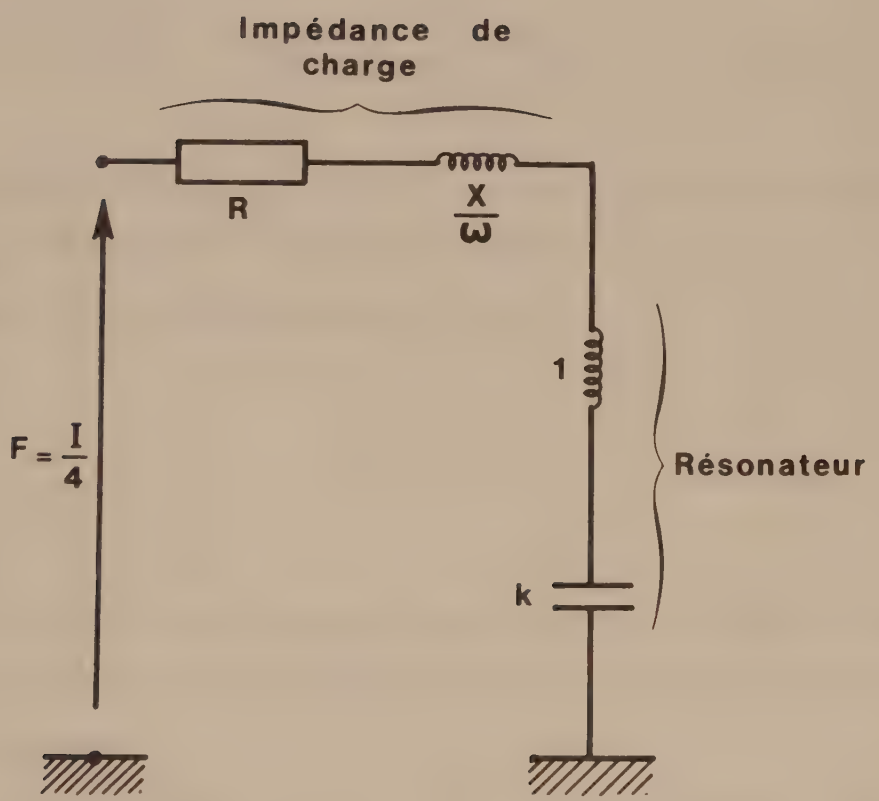


Figure 28

4.4.2. - Impédance électrique d'entrée du système

Nous négligerons ici l'effet de peau car les fréquences utilisées sont faibles. En intégrant l'équation (25) par rapport à z, on a :

$$E = -\frac{1}{R_M} \cdot \frac{\partial B}{\partial z} - u$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{+1} \left[\int_{-1}^{+1} E \cdot dx \right] \cdot dz = \int_{-1}^{+1} E \cdot dz$$

$$V = -\frac{1}{R_M} \cdot \frac{I}{2} - \frac{I}{2\left[R + i\left(X + \omega - \frac{k}{\omega}\right)\right]}$$

Nous retrouvons ici l'impédance d'entrée d'un système électroacoustique classique, comme le haut parleur par exemple.

A la résonance, le rendement maximum est :

$$\mathcal{R} = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_M}}$$

Suivant la dimension des montages de laboratoire et des inductions appliquées, il est possible d'obtenir des rendements maximum allant de 10 % à 20 %.

5. CONCLUSION

Le résonateur d'Helmoltz se comporte habituellement comme un récepteur, mais une excitation électromagnétique de la masse vibrante créée par une pompe électromagnétique le transforme en émetteur, il constitue donc une pompe autorésonante. L'expérience montre que son fonctionnement s'apparente à celui des émetteurs électrodynamiques tel que le haut-parleur, par exemple.

La théorie simplifiée a permis de décrire d'une manière satisfaisante le fonctionnement du système avec une interprétation physique aisée. L'étude expérimentale confirme la théorie et permet d'envisager des possibilités nouvelles d'émission de vibrations d'origine magnétohydrodynamiques.

CHAPITRE II

DEVELOPPEMENT DE RESONANCES MAGNETOACOUSTIQUES PAR APPLICATION D'UN CHAMP MAGNETIQUE

1. INTRODUCTION

1.1. - Généralités

Le problème physique considéré dans cette étude est celui de la production d'ondes magnétoacoustiques dans les milieux magnétohydrodynamiques. Le principe de telles ondes a déjà été étudié [9] [17] , mais les émetteurs utilisés restent du type classique , électromécanique ou piézoélectrique par exemple La nature des fluides magnétohydrodynamiques limite l'utilisation de ces générateurs de vibrations à cause des problèmes technologiques posés par la température, la corrosion et le contact fluide-émetteur entre autres.

L'idée développée ici est d'utiliser le champ de force électromagnétique afin de produire au sein même du fluide, la vibration voulue, en utilisant la loi de Maxwell-Faraday

$$\overrightarrow{Rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Le milieu électroconducteur se trouve donc en présence d'un champ de forces instationnaire qui, suivant sa nature, ainsi que celle du fluide, engendre, soit un équilibre magnétohydrostatique, soit une perturbation.

1.2. - Le système utilisé

Nous nous proposons ici de rechercher un système magnétohydrodynamique géométriquement simple fonctionnant suivant le principe de la loi de l'induction. Dans ce but, on créé une densité de courant annulaire en appliquant, à un

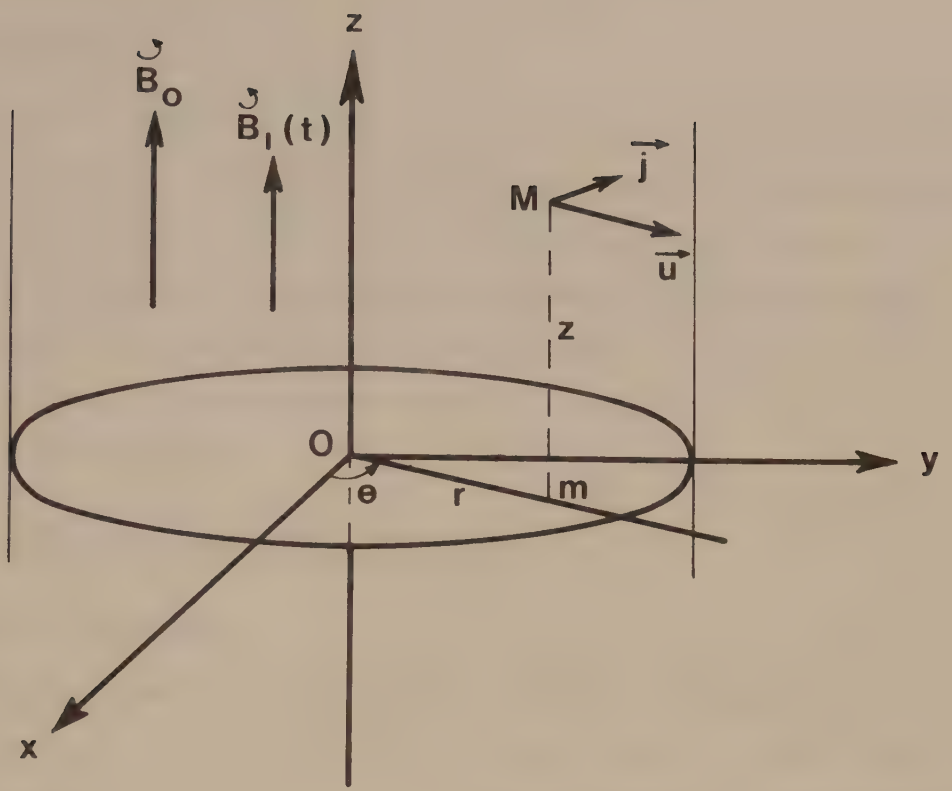


Figure 1

cylindre de fluide électroconducteur, un champ d'induction instationnaire et axial. Afin d'obtenir un champ de forces électromagnétique maximal, une induction magnétique, axiale et uniforme est également imposée.

L'application à un milieu électroconducteur d'une induction comprenant une partie stationnaire B_o et une partie instationnaire $B_1(t)$ créé un champ de force radial par suite de la structure cylindrique du système (figure 1).

En milieu compressible, il s'établit, pour certaines valeurs des fréquences d'excitation, des ondes acoustiques stationnaires. L'application de ce champ magnétique particulier met en évidence un caractère d'autorésonance du milieu conducteur placé dans de telles conditions. Afin d'étudier le fonctionnement du système, on se place dans le cas où le milieu extérieur n'exerce aucune contrainte sur celui-ci et où la paroi latérale du cylindre utilisé est

parfaitement flexible.

Le cas des milieux incompressibles et compressibles est traité et dans la seconde hypothèse, on effectue une mise en équation du mouvement radial. L'exploitation numérique des résultats théoriques ainsi obtenus est menée dans des cas correspondants à des exemples concrêts, les plasmas et les métaux liquides. Les effets visqueux sont ici négligeables et il n'en sera pas tenu compte numériquement. Les résultats obtenus à l'aide d'un montage expérimental sont confrontés avec la théorie.

2 - CAS DU FLUIDE INCOMPRESSIBLE

2.1. - Mise en équation

Soit un cylindre de fluide électroconducteur incompressible de rayon a, en présence d'un champ d'induction uniforme et axial B_0 aligné avec une composante instationnaire $B_1(t)$ (figure 1). On peut définir les variables adimensionnelles usuelles, a et B_0 étant respectivement la longueur et l'induction de référence.

L'équation de continuité de la vitesse s'écrit :

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot w) = 0 \qquad (1)$$

La relation (1) montre que, la vitesse restant finie sur l'axe du cylindre, celle-ci ne peut être que nulle. Le milieu est donc en équilibre magnétohydrostatique et les équations correspondantes sont :

$$\frac{\partial}{\partial r}(P + B) = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{1}{R_M}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial B}{\partial r}\right) = 0 \qquad (3)$$

La pression P inclut ici le potentiel scalaire des forces autres qu'électromagnétiques telle que la pesanteur par exemple. On remarque d'ailleurs que les forces de Laplace induites sont irrotationnelles, nous sommes donc en présence d'un

équilibre magnétohydrostatique instationnaire.

L'équation (2) représente l'équilibre magnétohydrostatique, tandis que (3) se réduit à une équation de diffusion.

2.2. - Les conditions aux limites

Il y a ici deux types de conditions aux limites, l'une est d'origine mécanique et l'autre électrique.

Il faut exprimer d'abord que la pression reste constante à l'extérieur du cylindre :

$$P(r,t) = P_0 \qquad r \geqslant 1$$

L'induction ne diffuse pas instantanément à l'intérieur du cylindre et à l'instant t = 0, on peut écrire :

$$B(r,t) = 0 \qquad r < 1$$

$$B(r,t) = B_1(t) \qquad r \geqslant 1$$

Aux instants ultérieurs la condition aux limites est donnée par :

$$B(r,t) = B_1(t) \qquad r = 1$$

2.3. - Résolution des équations d'équilibre :

La solution de l'équation :

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial r}\left(P + B\right) = 0$$

est immédiate, en effet, en tenant compte des conditions aux limites :

$$P + B = P_0 + B_1(t)$$

donc

$$P - P_0 = B_1(t) - B$$

La résolution de l'équation

$$(3) \qquad \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{1}{R_M} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial B}{\partial r}\right) = 0$$

s'effectue aisément en utilisant la transformée de Hankel [28]

$$[B] = \int_0^1 B(r,t) \cdot J_0(\alpha r) \cdot r \cdot dr$$

$J_0(\alpha)$ étant la fonction de Bessel de première espèce d'indice 0. La condition aux limites impose à α de vérifier

$$J_0(\alpha) = 0$$

En prenant la transformée de Hankel de l'équation (3), on a

$$\frac{d}{dt}[B] + \frac{\alpha^2}{R_M}[B] = \frac{\alpha}{R_M} \cdot B_1(t) \cdot J_1(\alpha)$$

Soit, en régime sinusoïdal de pulsation Ω

$$\frac{d}{dt}[B] + \frac{\alpha^2}{R_M}[B] = \frac{\alpha}{R_M} \cdot B(1) \cdot e^{-i\Omega t} \cdot J_1(\alpha) \qquad (4)$$

La solution s'écrit donc

$$[B] = A \cdot e^{-\frac{\alpha^2}{R_M} \cdot t} + \frac{\alpha \cdot J_1(\alpha) \cdot B(1)}{\alpha^2 - i\Omega R_M} \cdot e^{-i\Omega t}$$

En tenant compte de la condition initiale,

$$[B] = \frac{\alpha \cdot J_1(\alpha) \cdot B(1)}{\alpha^2 - i\Omega R_M} \left[e^{-i\Omega t} - e^{-\frac{\alpha^2}{R_M} \cdot t} \right]$$

et en revenant à la forme originale

$$B(r,t) = \sum_{\alpha} \frac{2 \cdot [B]}{J_1^2(\alpha)} \cdot J_0(\alpha \cdot r)$$

Soit

$$B(r,t) = \sum_{\alpha} \frac{2.\alpha.B(1).\ J_0(\alpha.r)}{(\alpha^2 - i\,\Omega R_M).\ J_1(\alpha)} \left(e^{-i\Omega t} - e^{-\frac{\alpha^2}{R_M}.t} \right)$$

En régime permanent sinusoïdal de pulsation Ω , on obtient

$$B(r,t) = \sum_{\alpha} \frac{2.\alpha.\ B(1).\ J_0(\alpha r)}{(\alpha^2 - i\,\Omega R_M).\ J_1(\alpha)} .\ e^{-i\Omega t}$$

et pour un champ magnétique d'excitation $B_1(t)$ de forme quelconque,

$$B(r,t) = \sum_{\Omega} \sum_{\alpha} \frac{2.\alpha.\ B_1(\Omega)}{(\alpha^2 - i\,\Omega R_M)\ J_1(\alpha)} .\ e^{-i\Omega t} .\ J_0(\alpha r)$$

3. - CAS DU FLUIDE COMPRESSIBLE

3.1. - Mise en équation

Soit C la célérité du son du milieu, si les forces de Laplace engendrent des ondes magnétoacoustiques dont les longueurs d'onde sont de l'ordre de grandeur des dimensions du système, les phénomènes de propagation deviennent alors prépondérants . La notion de compressibilité dépend ici uniquement des fréquences d'excitation et non du milieu lui-même.

En reprenant les mêmes notations, et dans le cas d'une perturbation infinitésimale du type acoustique, le système d'équation régissant le mouvement radial s'écrit alors :

$$(5) \quad \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r.u) + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{4}{3R_e} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r.u) \right) + \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial B}{\partial r} = 0$$

$$(7) \quad \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{1}{R_M} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial B}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r.u) = 0$$

3.2. Méthode de résolution

Les conditions aux limites sont les mêmes que celles du milieu incompressible et on peut utiliser la méthode des transformées de Hankel pour le système à symétrie de révolution (5), (6) et (7)

Soit :

$$[u] = \int_0^1 u(r,t) \cdot J_1(\alpha r) \cdot r \cdot dr$$

$$[P] = \int_0^1 P(r,t) \cdot J_0(\alpha r) \cdot r \cdot dr$$

$$[B] = \int_0^1 B(r,t) \cdot J_0(\alpha r) \cdot r \cdot dr$$

où $J_0(r)$ et $J_1(r)$ sont respectivement les fonctions de BESSEL de première espèce d'indice 0 et 1. Les conditions aux limites montrent que α correspond aux racines de l'équation transcendante (8), $J_0(\alpha) = 0$.

Avec une excitation sinusoïdale de pulsation Ω, la transformée de Hankel du système s'écrit : [28]

$$(9) \qquad \frac{d[P]}{dt} + \alpha \cdot c^2 [u] = 0$$

$$(10) \qquad \frac{d[u]}{dt} + \frac{4\alpha^2}{3Re} \cdot [u] - \alpha [P] - \alpha [B] = \frac{4\alpha}{3Re} \cdot u(1) \cdot J_1(\alpha) \cdot e^{-i\Omega t}$$

$$(11) \qquad \frac{d[B]}{dt} + \frac{\alpha^2}{R_M} \cdot [B] + \alpha [u] = \frac{\alpha}{R_M} \cdot B(1) \cdot J_1(\alpha) \cdot e^{-i\Omega t}$$

où $u(1)$ et $B(1)$ représentent respectivement l'amplitude de la vitesse et de l'induction à la paroi du cylindre.

3.2.1. Solution sans second membre

La solution sans second membre correspond à la transformée de Hankel du régime transitoire, soit :

$$(12)\quad \frac{d}{dt}[P]_1 + \alpha . c^2 . [u]_1 = 0$$

$$(13)\quad \frac{d}{dt}[u]_1 + \frac{4\alpha^2}{3Re} . [u]_1 - \alpha . [P]_1 - \alpha . [B]_1 = 0$$

$$(14)\quad \frac{d}{dt}[B]_1 + \frac{\alpha^2}{R_M} . [B]_1 + \alpha . [u]_1 = 0$$

La recherche de solutions exponentielles de la forme $e^{-i\omega t}$ réduit le système à

$$\begin{bmatrix} -i\omega & \alpha . c^2 & 0 \\ -\alpha & \left(\frac{4\alpha^2}{3Re} - i\omega\right) & -\alpha \\ 0 & \alpha & \left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\omega\right) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} [P]_1 \\ [u]_1 \\ [B]_1 \end{bmatrix} = 0$$

La solution non triviale impose au déterminant du système d'être différent de zéro, soit :

$$(15)\quad (-i\omega)^3 + (-i\omega)^2 . \alpha^2 . \left(\frac{4}{3Re} + \frac{1}{R_M}\right) + (-i\omega) . \alpha^2 \left[\frac{4\alpha^2}{3Re\,R_M} + c^2 + 1\right] + \frac{\alpha^4 c^2}{R_M} = 0$$

Il y a en général trois valeurs de $-i\omega$ qui peuvent satisfaire à l'équation (15), la solution sans second membre est donc :

$$[u]_1 = \sum_{n=1}^{3} [u]_{1,n} . e^{-i\omega_n t}$$

$$[P]_1 = \sum_{n=1}^{3} \frac{\alpha . c^2}{i\omega_n} . [u]_{1,n} . e^{-i\omega_n t}$$

$$[B]_1 = \sum_{n=1}^{3} \frac{-\alpha}{\frac{\alpha^2}{R_M} - i\omega_n} . [u]_{1,n} . e^{-i\omega_n t}$$

3.2.2. - Solution particulière avec second membre.

La recherche de solutions sinusoïdales de pulsation Ω conduit à

$$\begin{bmatrix} -i\Omega & \alpha c^2 & 0 \\ -\alpha & \left(\frac{4\alpha^2}{3R_e} - i\Omega\right) & -\alpha \\ 0 & \alpha & \left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\Omega\right) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} [P]_2 \\ [u]_2 \\ [B]_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4\alpha}{3R_e} . u(1) . J_1(\alpha) \\ \frac{\alpha}{R_M} . B(1) . J_1(\alpha) \end{bmatrix}$$

La résolution de ce système implique :

$$[P]_2 = \frac{-\alpha . c^2 \left[\left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\Omega\right)\left(\frac{4\alpha}{3R_e} u(1) . J_1(\alpha)\right) + \frac{\alpha^2}{R_M} . B(1) . J_1(\alpha)\right]}{-i\Omega\left[\left(\frac{4\alpha^2}{3R_e} - i\Omega\right)\left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\Omega\right) + \alpha^2\right] + \alpha^2 . c^2 \left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\Omega\right)} . e^{-i\Omega t}$$

$$[u]_2 = \frac{-i\Omega . \left[\frac{4\alpha}{3R_e} . u(1) . J_1(\alpha)\left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\Omega\right) + \frac{\alpha^2}{R_M} . B(1) . J_1(\alpha)\right]}{-i\Omega\left[\left(\frac{4\alpha^2}{3R_e} - i\Omega\right)\left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\Omega\right) + \alpha^2\right] + \alpha^2 . c^2 \left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\Omega\right)} . e^{-i\Omega t}$$

$$[B]_2 = \frac{-i\Omega\left[\left(\frac{4\alpha^2}{3R_e} - i\Omega\right)\cdot\frac{\alpha}{R_M}\,B(1)\cdot J_1(\alpha) - \frac{4\alpha^2}{3R_e}\,u(1)\cdot J_1(\alpha)\right] + \frac{\alpha^3 c^2}{R_M}\,B(1)\cdot J_1(\alpha)}{-i\Omega\left[\left(\frac{4\alpha^2}{3R_e} - i\Omega\right)\left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\Omega\right) + \alpha^2\right] + \alpha^2\cdot c^2\left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\Omega\right)} \cdot e^{-i\Omega t}$$

3.2.3. - Solution générale et calcul des constantes

La solution générale du système aux transformées de Hankel est :

$$[P] = [P]_1 + [P]_2$$

$$[u] = [u]_1 + [u]_2$$

$$[B] = [B]_1 + [B]_2$$

Chaque transformée de Hankel dépend de cinq constantes

$u_1, u_2, u_3, u(1), B(1)$

on peut d'abord calculer les trois premières en fonction des deux dernières en utilisant la con dition initiale, le phénomène ne s'établit pas instantanément, et à l'instant t = 0,

$$[u] = [P] = [B] = 0$$

ce qui s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{\alpha\cdot c^2}{i\omega_1} & \dfrac{\alpha\cdot c^2}{i\omega_2} & \dfrac{\alpha\cdot c^2}{i\omega_3} \\ \dfrac{-\alpha}{\left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\omega_1\right)} & \dfrac{-\alpha}{\left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\omega_2\right)} & \dfrac{-\alpha}{\left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\omega_3\right)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [u]_2 \\ [P]_2 \\ [B]_2 \end{bmatrix}$$

Donc,

$$u_1 = \frac{\begin{bmatrix} [u]_2 & 1 & 1 \\ [P]_2 & \frac{\alpha c^2}{i\omega_2} & \frac{\alpha c^2}{i\omega_3} \\ [B]_2 & \frac{-\alpha}{\left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\omega_2\right)} & \frac{-\alpha}{\left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\omega_3\right)} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{\alpha c^2}{i\omega_1} & \frac{\alpha c^2}{i\omega_2} & \frac{\alpha c^2}{i\omega_3} \\ \frac{-\alpha}{\left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\omega_1\right)} & \frac{-\alpha}{\left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\omega_2\right)} & \frac{-\alpha}{\left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\omega_3\right)} \end{bmatrix}}$$

$$u_2 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & [u]_2 & 1 \\ \frac{\alpha c^2}{i\omega_1} & [P]_2 & \frac{\alpha c^2}{i\omega_3} \\ \frac{-\alpha}{\left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\omega_1\right)} & [B]_2 & \frac{-\alpha}{\left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\omega_3\right)} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{\alpha c^2}{i\omega_1} & \frac{\alpha c^2}{i\omega_2} & \frac{\alpha c^2}{i\omega_3} \\ \frac{-\alpha}{\left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\omega_1\right)} & \frac{-\alpha}{\left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\omega_2\right)} & \frac{-\alpha}{\left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\omega_3\right)} \end{bmatrix}}$$

$$u_3 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & [u]_2 \\ \frac{\alpha c^2}{i\omega_1} & \frac{\alpha c^2}{i\omega_2} & [P]_2 \\ \frac{-\alpha}{\left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\omega_1\right)} & \frac{-\alpha}{\left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\omega_2\right)} & [B]_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{\alpha c^2}{i\omega_1} & \frac{\alpha c^2}{i\omega_2} & \frac{\alpha c^2}{i\omega_3} \\ \frac{-\alpha}{\left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\omega_1\right)} & \frac{-\alpha}{\left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\omega_2\right)} & \frac{-\alpha}{\left(\frac{\alpha^2}{R_M} - i\omega_3\right)} \end{bmatrix}}$$

Les constantes u(1) et B(1) dépendent des conditions aux limites électromécaniques. Si B(1) est imposée, u(1) est calculée à partir des solutions originales, soient :

$$(16) \quad P(r,t) = \sum_{\alpha} \frac{2.[P]}{J_1^2(\alpha)} \cdot J_0(\alpha.r)$$

$$(17) \quad u(r,t) = \sum_{\alpha} \frac{2.[u]}{J_1^2(\alpha) \cdot \left(2 - \frac{1}{\alpha^2}\right)} \cdot J_1(\alpha.r)$$

$$(18) \quad B(r,t) = \sum_{\alpha} \frac{2.[B]}{J_1^2(\alpha)} \cdot J_0(\alpha.r)$$

Le calcul de la constante u(1) s'effectue en utilisant la condition aux limites de l'induction en régime permanent

$$B(1).e^{-i\Omega t} = \lim_{r \to 1} \sum_{\alpha} \frac{2.[B]}{J_1^2(\alpha)} . J_0(\alpha r)$$

On obtient ainsi une relation linéaire entre B(1) et u(1) qui permet de déterminer cette dernière constante. A partir des trois grandeurs fondamentales P(r,t), u(r,t),B(r,t), on peut calculer des grandeurs annexes, comme la densité de courant et l'amplitude du mouvement, soient respectivement :

$$j = \frac{\partial B}{\partial r} = \sum_{\alpha} \frac{-2\alpha[B]}{J_1^2(\alpha)} . J_1(\alpha.r)$$

$$\xi = \int u(r,t).dt = \sum_{\alpha} \frac{2.J_1(\alpha r)}{J_1^2(\alpha).\left(2 - \frac{1}{\alpha^2}\right)} . \int [u].dt$$

4 - EXPLOITATION NUMERIQUE

Compte-tenu de la multiplicité des paramètres intervenant dans les formules (Re, R_M, C, Ω ...), nous effectuons une exploitation numérique des résultats théoriques en régime permanent sinusoïdal dans les cas les plus représentatifs. C'est pourquoi, étant en présence de deux effets dissipatifs, l'effet visqueux et l'effet Joule, nous ne tenons pas compte du premier car il est ici négligeable dans la plupart des cas (plasmas et métaux liquides).

4.1. - Etude du champ des vitesses

Nous choisissons la vitesse pour représenter l'exploitation numérique des grandeurs mécaniques. En régime permanent sinusoïdal de pulsation Ω et en l'absence de viscosité, la formule (17) devient

$$(19) \quad u(r,t) = \sum_{\alpha} \frac{-2.i.\Omega.B(1).J_1(\alpha r).e^{-i\Omega t}}{\left[\alpha^2(\alpha^2 C^2 - \Omega^2) - i\Omega R_M\left(\alpha^2(C^2+1) - \Omega^2\right)\right].\left(2 - \frac{1}{\alpha^2}\right).J_1(\alpha)}$$

4.1.1. Etude de la vitesse en fonction de la fréquence

L'application numérique de la formule (19) est illustrée par les figures 2, 3 et 4 qui représentent respectivement l'amplitude de la vitesse à la paroi du cylindre pour les valeurs 0,1 _ 1 et 3 du paramètre C ainsi que pour différentes valeurs du nombre de Reynolds magnétique.

Les valeurs des paramètres choisis ici correspondent à un plasma dont la conductivité électrique varie dans un large domaine, les valeurs du nombre de Reynolds magnétique étant respectivement 0,01 _ 10 et 100.

On note d'abord la présence de fréquences de résonance, caractérisant un phénomène d'ondes stationnaires, qui se développent le long d'un rayon et dont les valeurs dépendent des zéros de la fonction de Bessel $J_0(\alpha)$ ensuite, l'effet Joule limite l'amplitude même pour la plus petite valeur du nombre de Reynolds magnétique qui n'a pu être représentée entièrement sur le graphique. La dissipation énergétique a également pour effet de décaler les fréquences de résonance notamment pour les faibles valeurs de C, par ailleurs, ces fréquences restent plus proches pour C = 3, en raison de deux pulsations privilégiées mises en évidence par la formule (19) :

$$\Omega_1 = \alpha . C$$

et

$$\Omega_2 = \alpha . \sqrt{C^2 + 1}$$

Une interprétation physique de ces deux pulsations apparaîtra mieux par la suite.

4.1.2. Etude de la vitesse en fonction du rayon.

La figure 5 représente les principaux cas de la variation de l'amplitude de la vitesse en fonction du rayon, et ceci pour différentes valeurs des paramètres C, Ω et R_M. Pour des pulsations voisines des résonances, nous mettons ici en évidence le caractère d'onde stationnaire de la vitesse et il apparaît les propriétés essentielles des phénomènes ondulatoires en milieu limité.

...

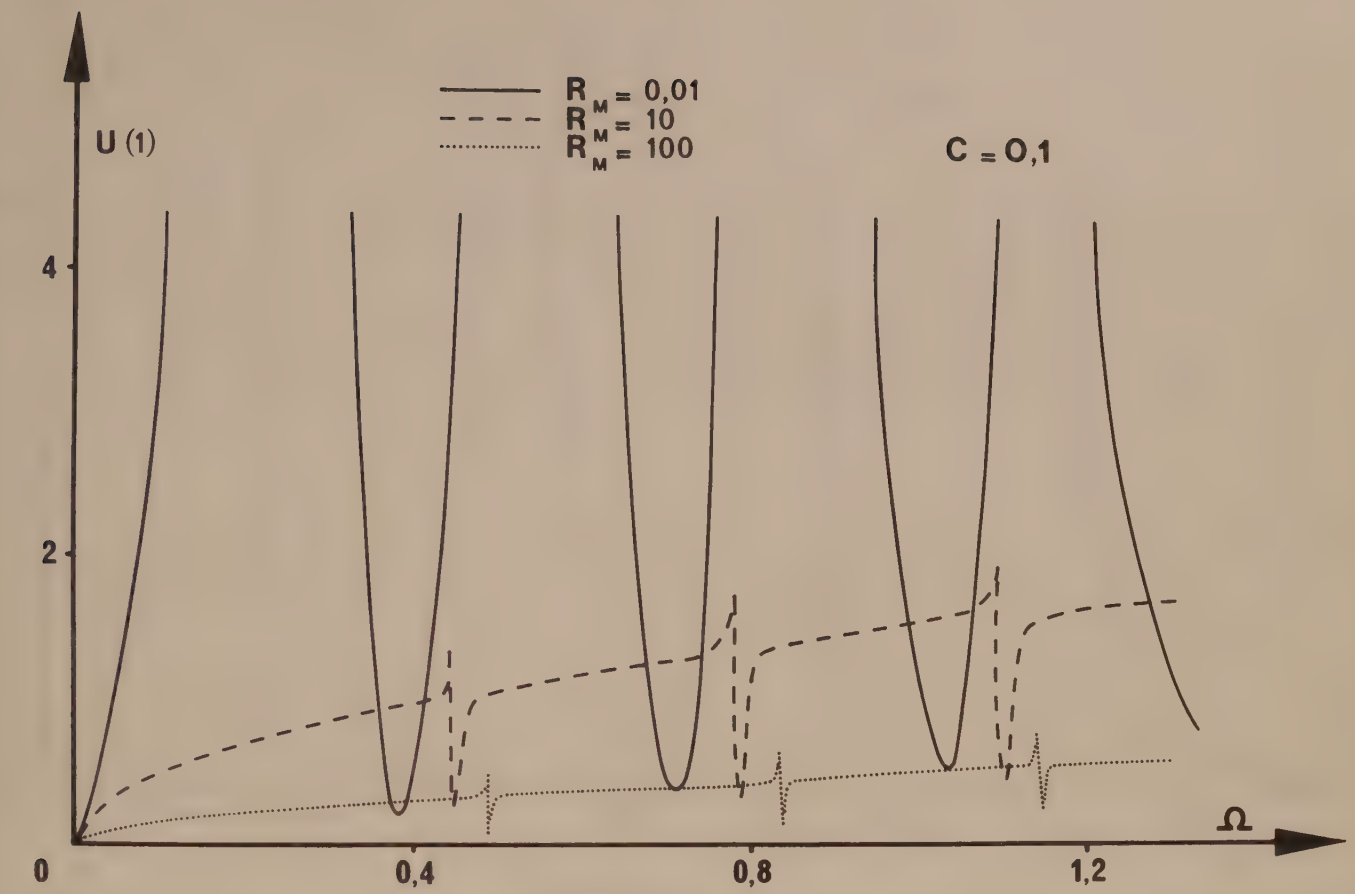


Figure 2

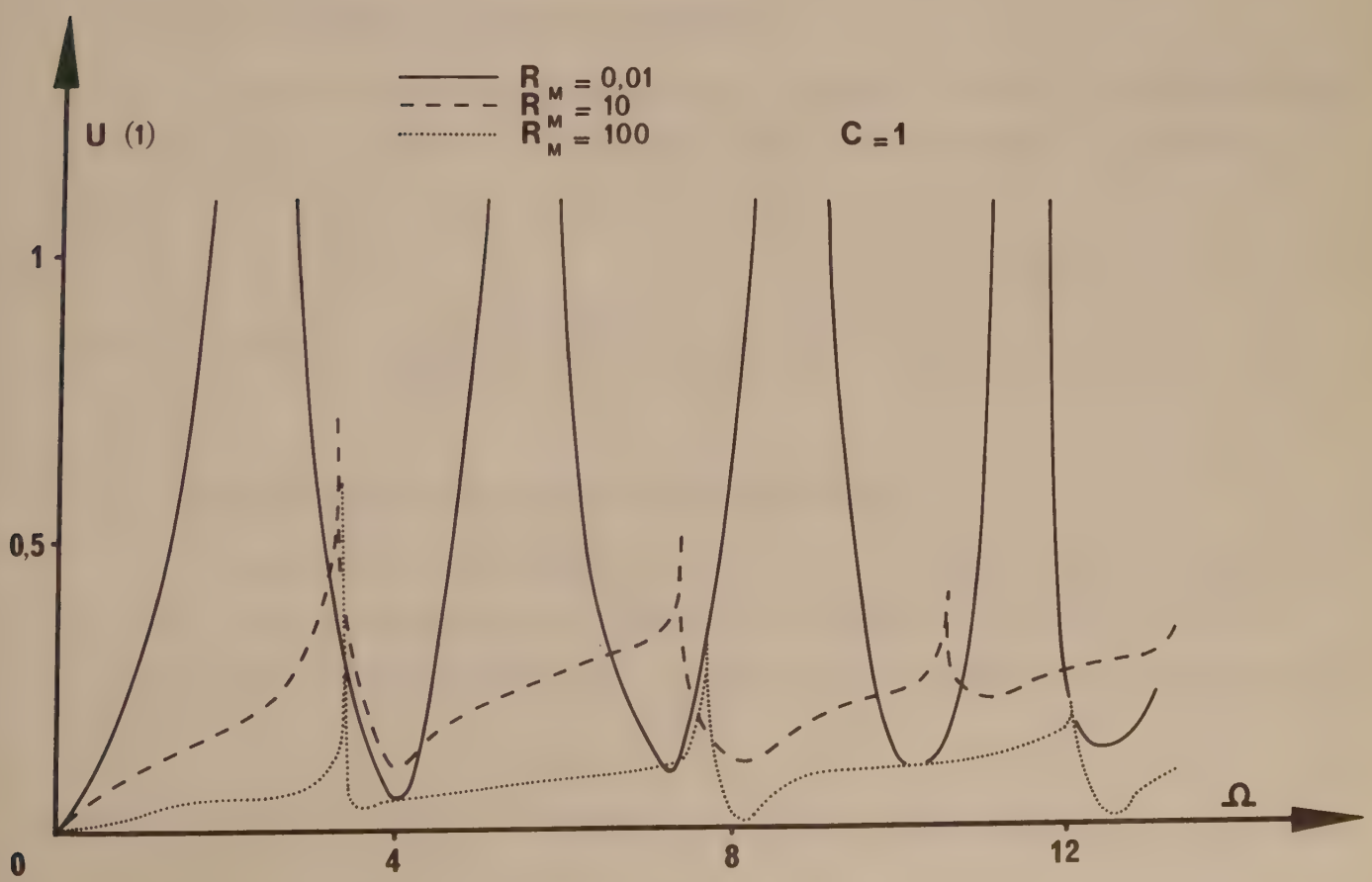


Figure 3

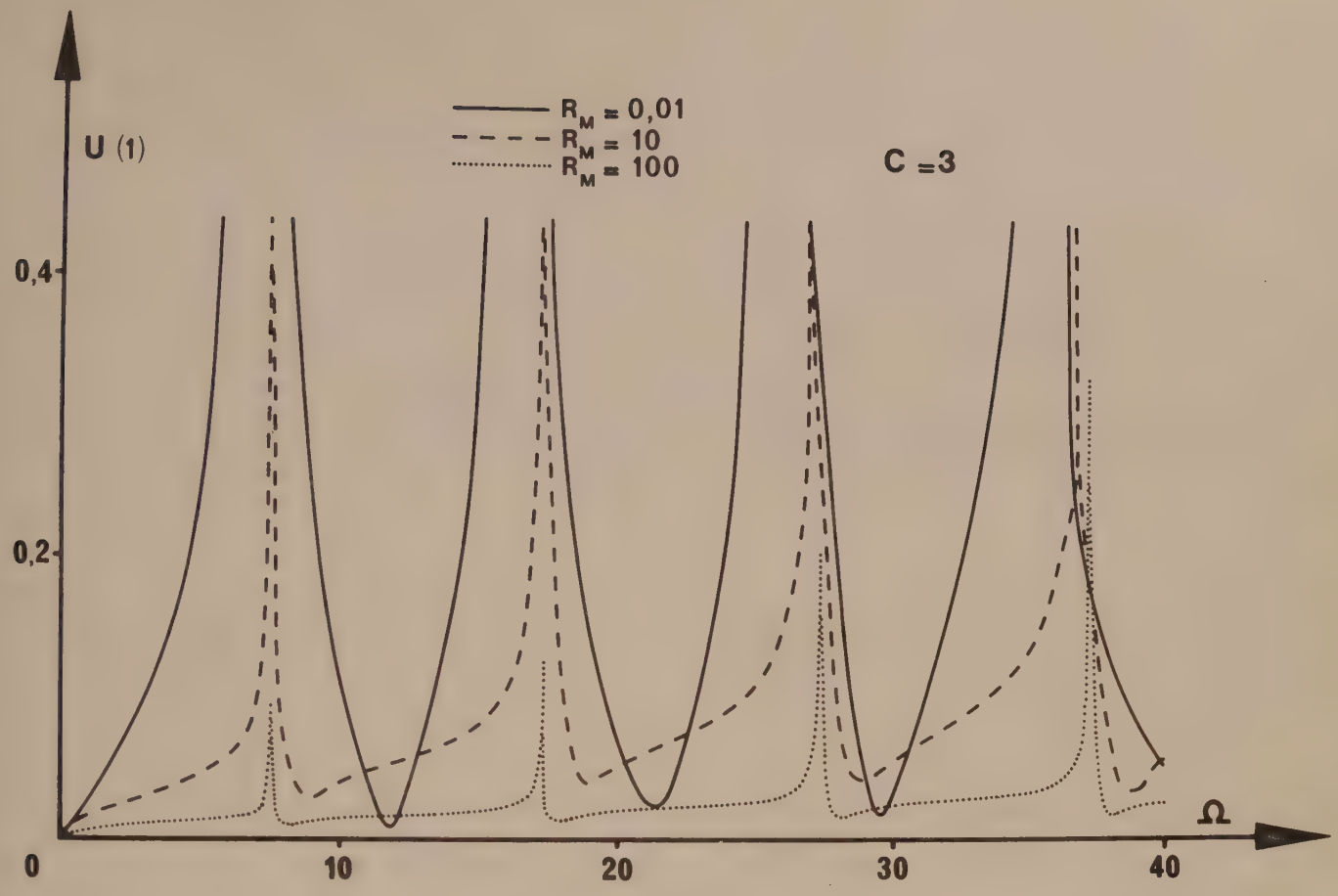


Figure 4

4.2. Etude du champ d'induction magnétique

On choisit l'induction magnétique pour illustrer les grandeurs électriques qui se développent dans le cylindre. En l'absence de viscosité, et en régime permanent sinusoïdal de pulsation Ω, la formule (18) devient :

$$(20) \qquad B(r,t) = \sum_{\alpha} \frac{2.\alpha.B(1).(\alpha^2c^2-\Omega^2).J_0(\alpha r).e^{-i\Omega t}}{\left[\alpha^2(\alpha^2c^2-\Omega^2)-i\Omega R_M\left(\alpha^2(c^2+1)-\Omega^2\right)\right].J_1(\alpha)}$$

4.2.1. Etude de l'induction en fonction de la fréquence

La relation (20) met également en évidence les deux pulsations privilégiées, Ω_1 et Ω_2 déjà entrevues lors de l'étude de la vitesse, mais leur signification physique est ici beaucoup plus nette, en effet : pour $0 \leqslant r \leqslant 1$, il vient successivement :

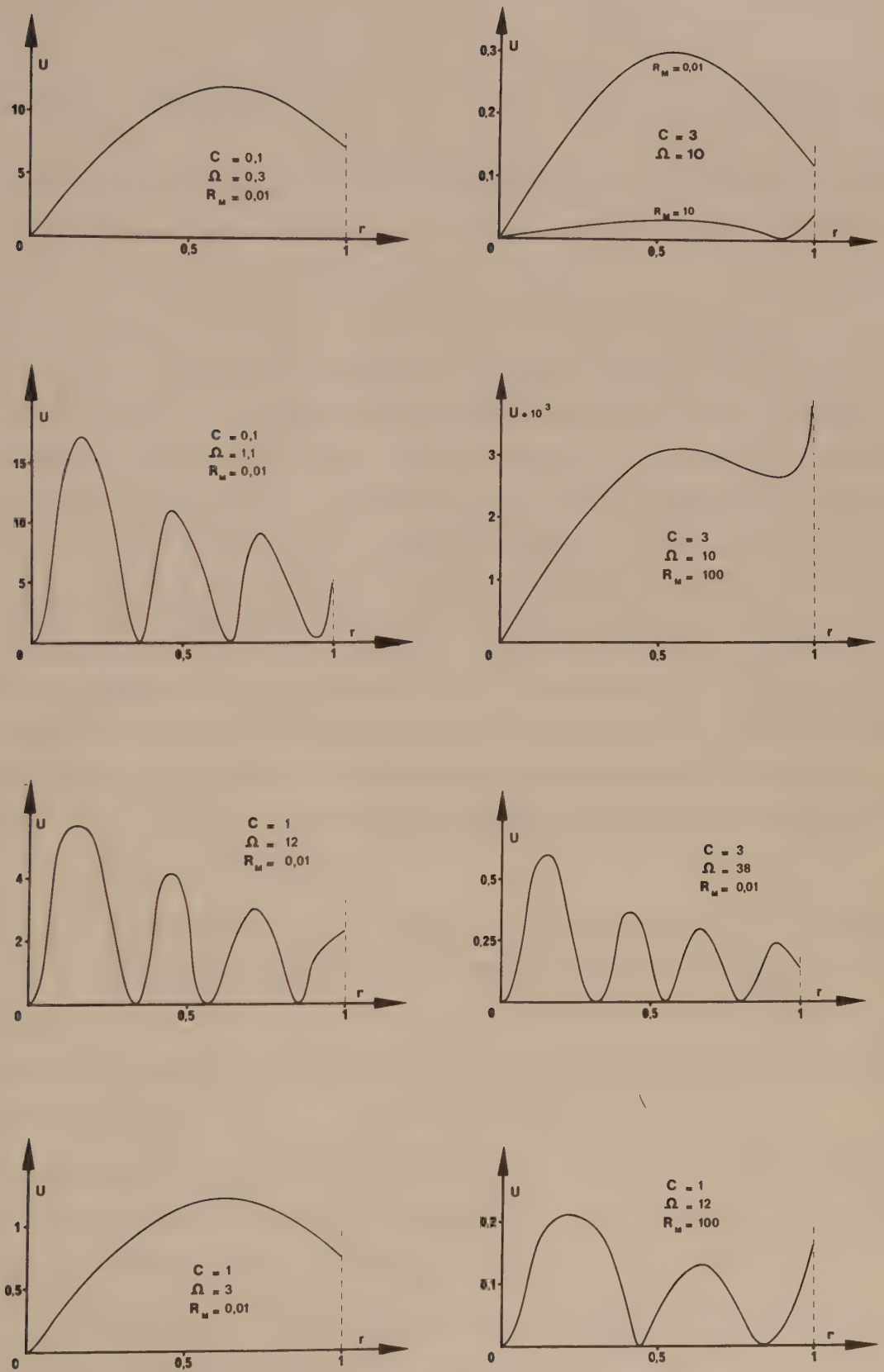

U
r
C = 0,1
Ω = 0,3
R_M = 0,01
C = 3
Ω = 10
R_M = 0,01
R_M = 10
C = 0,1
Ω = 1,1
R_M = 0,01
U . 10^3
C = 3
Ω = 10
R_M = 100
C = 1
Ω = 12
R_M = 0,01
C = 3
Ω = 38
R_M = 0,01
C = 1
Ω = 3
R_M = 0,01
C = 1
Ω = 12
R_M = 100

Figure 5

(21) $B(r,t) = 0$ $\qquad \Omega = \Omega_1 = \alpha . c$

(22) $B(r,t) = B(1) . e^{-i\Omega t}$ $\qquad \Omega = \Omega_2 = \alpha . \sqrt{c^2+1}$

Une étude réalisée par J.H. MURPHY [17] sur la propagation des ondes magnétoacoustiques dans les guides d'ondes nous montre que Ω_1 correspond à une antirésonance purement acoustique, tandis que Ω_2 est une résonance magnétoacoustique. Les formules (21) et (22) montrent que tant pour Ω_1 que pour Ω_2 , il n'y a aucun courant qui se développe dans le fluide électroconducteur en mouvement car l'amplitude du champ magnétique induit est soit nulle, soit constante. Cela signifie que, dans les deux cas , le courant d'excitation d'origine extérieure compense exactement le courant induit par le mouvement . Malgré la présence d'un champ d'induction uniforme et axial appliqué au cylindre, le fluide électroconducteur soumis aux pulsations particulières Ω_1 et Ω_2 ne présente plus, en apparence, d'effets dissipatifs dans son mouvement, les pertes étant compensées par la source. Par conséquent, on peut dire que pour Ω égal Ω_1 un milieu électroconducteur placé dans de telles conditions ne modifie pas les lignes de force de l'induction appliquée, et pour Ω_1 égal Ω_2 il se développe dans ce même milieu des ondes magnétoacoustiques sans qu'aucun courant ne traverse celui-ci.

Pour la pulsation Ω_1 , il se produit une antirésonance de l'induction, donc des autres grandeurs électriques, tandis que pour la valeur Ω_2 nous caractérisons le phénomène par une pseudo-résonance car dans tous les cas, l'amplitude de l'induction est limitée à la valeur B(1). On peut donc justifier l'approximation $B(1) \ll 1$ quelle que soit Ω .

Les figures 6, 7 et 8 représentent les variations de l'amplitude de l'induction sur l'axe du cylindre en fonction de la fréquence, et ceci pour diverses valeurs des paramètres C et R_M et B(1) est ici pris égal à l'unité.

Tout d'abord, le nombre de Reynolds magnétique R_M agit par l'intermédiaire de la conductivité électrique du milieu, c'est-à-dire qu'il y a une pénétra-

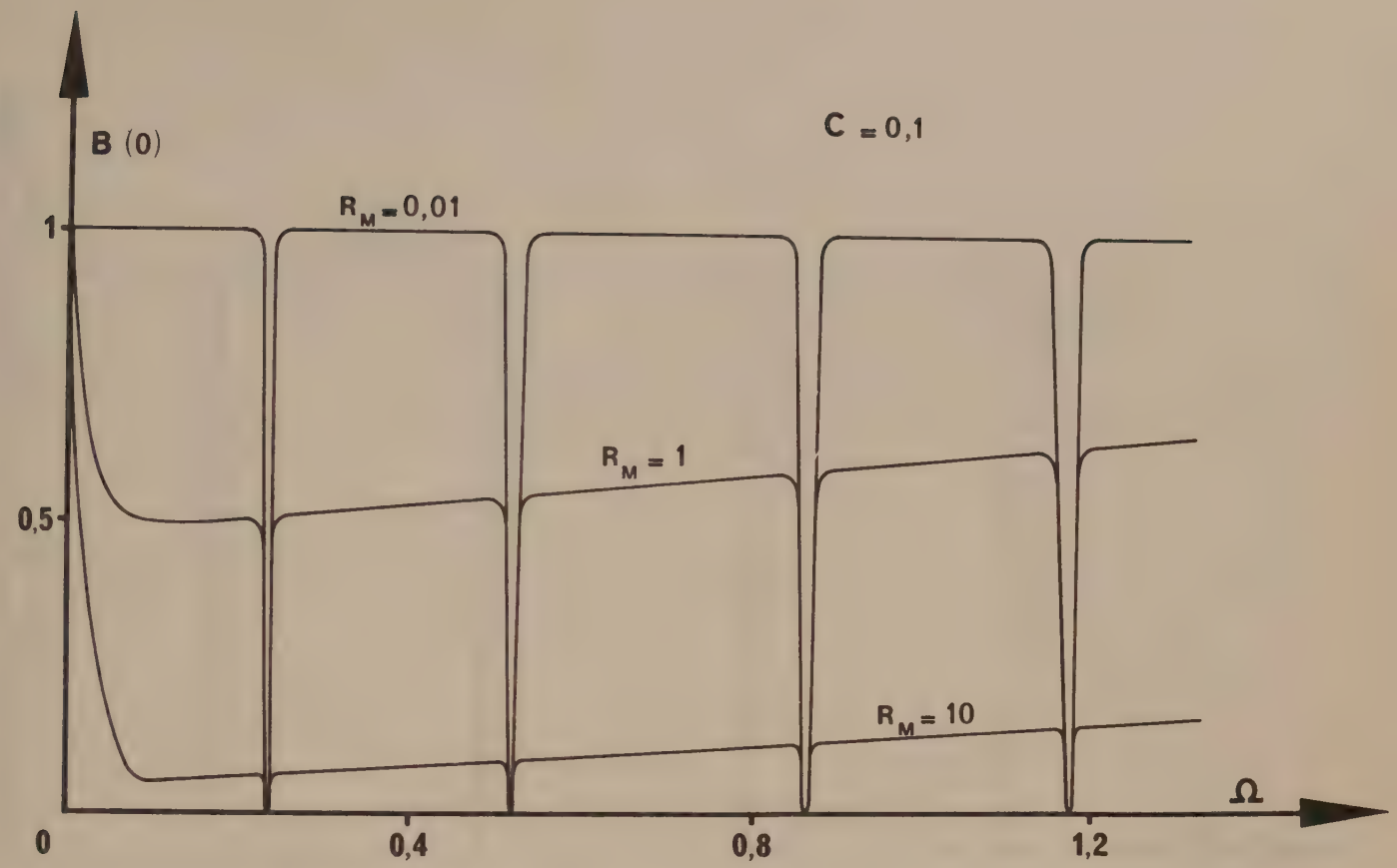


Figure 6

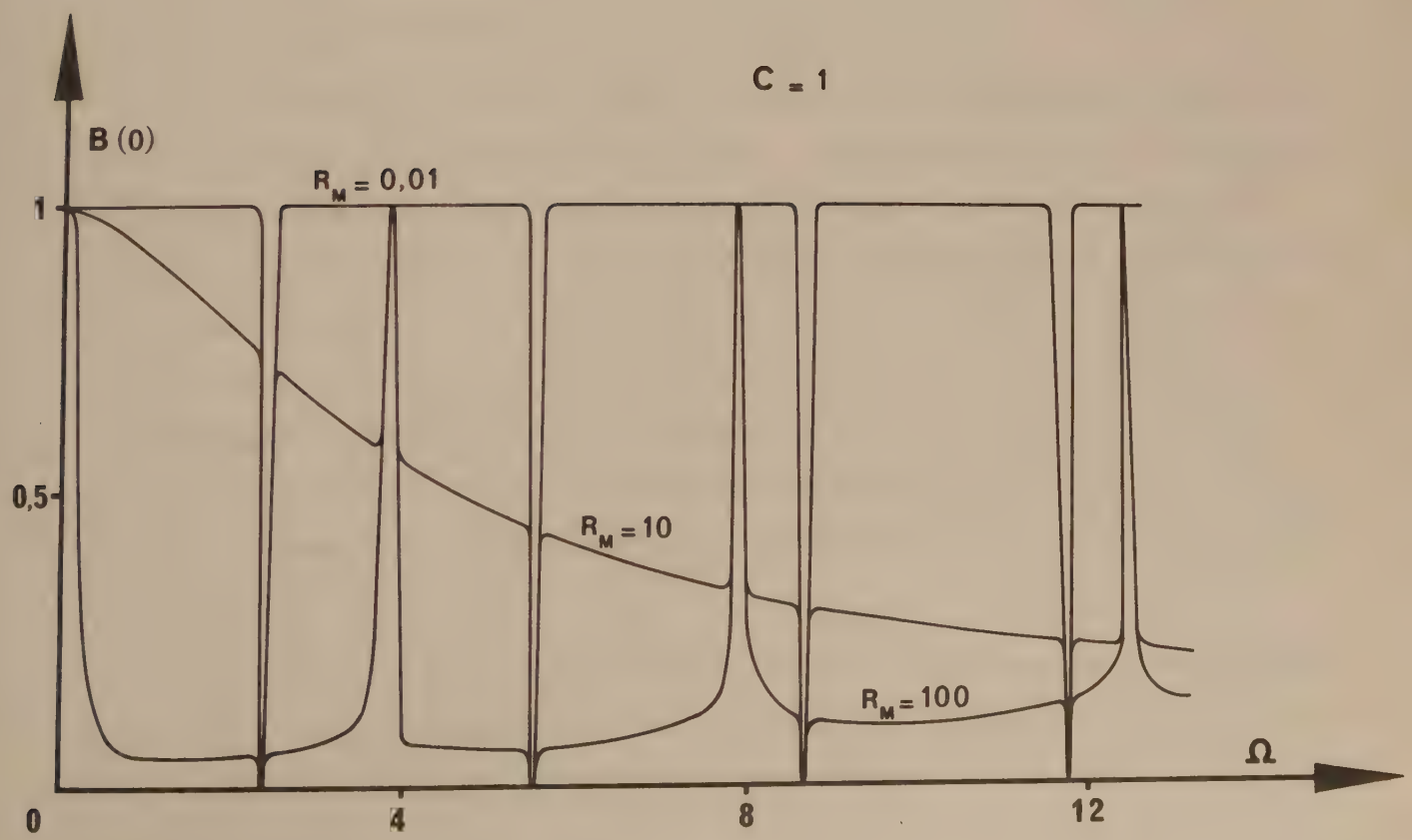


Figure 7

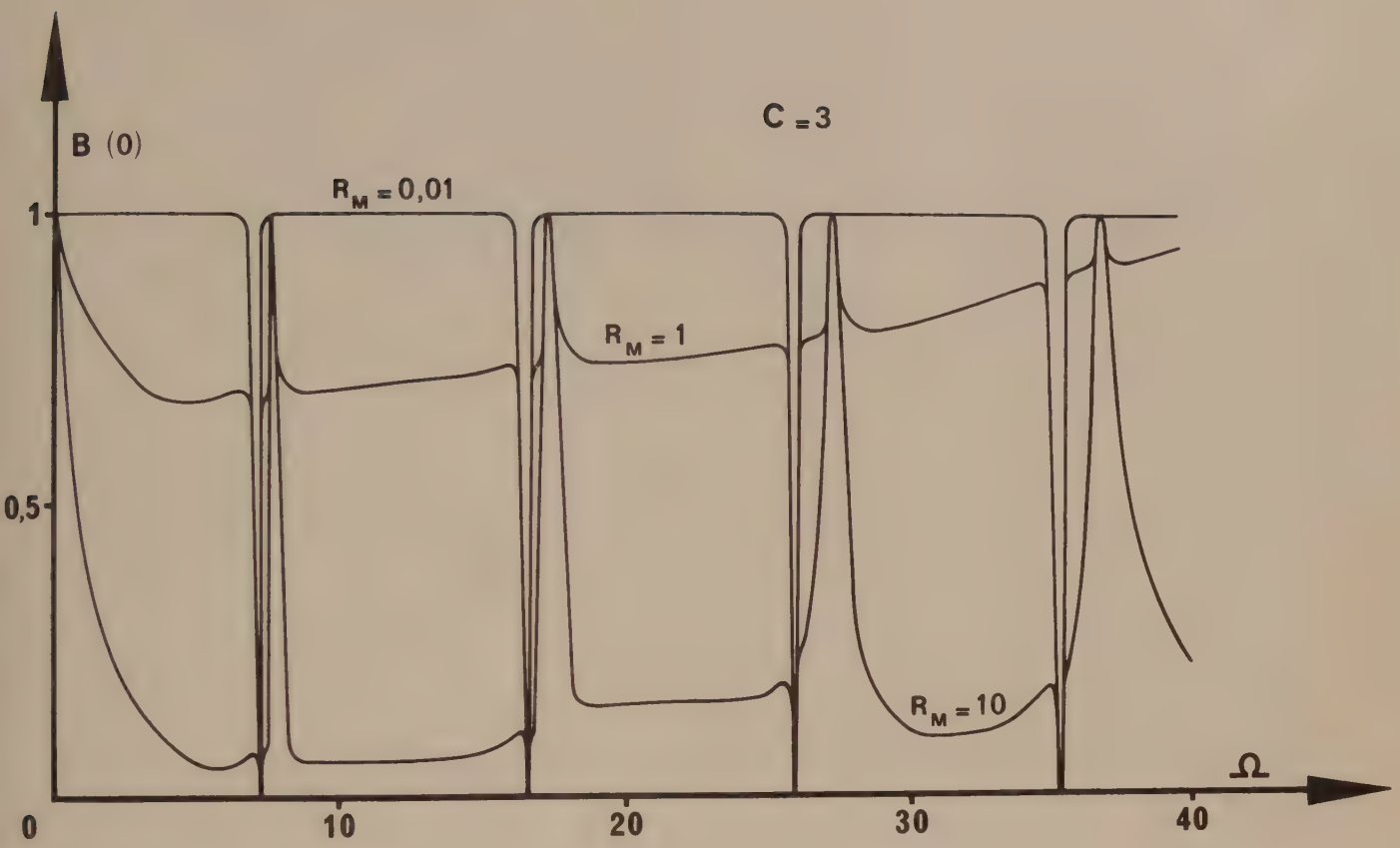


Figure 8

tion plus ou moins forte de l'induction par effet de peau.

Le paramètre C joue un rôle beaucoup plus important car il intervient dans l'expression des pulsations Ω_1 et Ω_2. Nous choisissons ici trois valeurs de C représentant des cas types : lorsque C est faible devant l'unité (C=0,1 figure 6). Les pulsations Ω_1 et Ω_2 sont alors très différentes, et il en résulte que les antirésonances se succèdent beaucoup plus rapidement que les pseudo-résonances, tandis que pour des valeurs de C supérieures à l'unité (C=3 figure 8), les pulsations Ω_1 et Ω_2 sont très proches, il y a une quasi-concordance entre les pseudorésonances et les antirésonances et un cas limite intéressant apparaît : lorsque C augmente, Ω_1 tend vers Ω_2, ce qui par la suite, fera l'objet d'une étude particulière.

Les résultats précédents montrent d'ailleurs l'importance jouée par le paramètre C dans le couplage électromécanique du système, et ceci d'une manière indépendante du nombre de Reynolds magnétique.

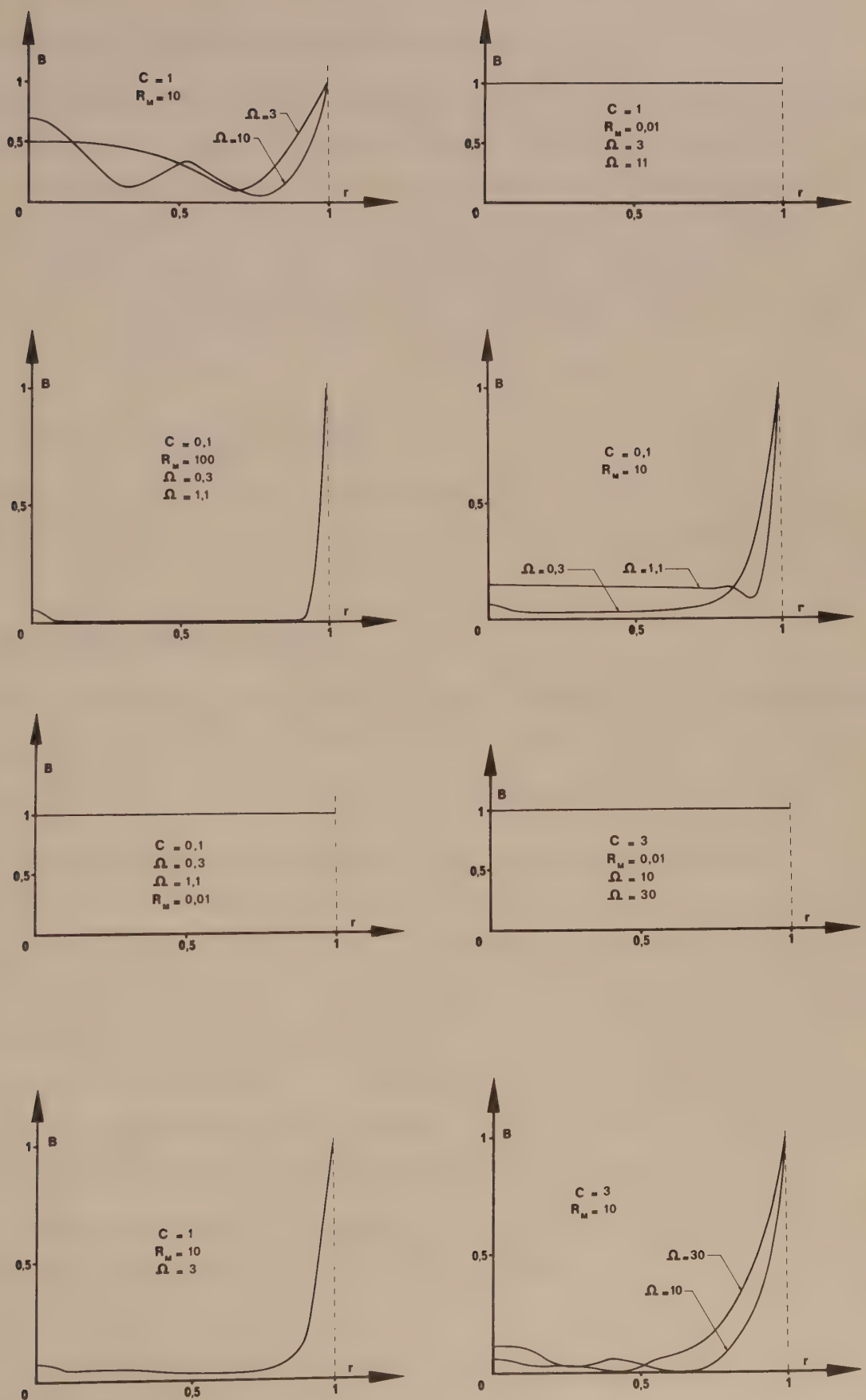

B
r
0
0,5
1
C = 1
R_M = 10
Ω = 3
Ω = 10
C = 1
R_M = 0,01
Ω = 3
Ω = 11
C = 0,1
R_M = 100
Ω = 0,3
Ω = 1,1
C = 0,1
R_M = 10
Ω = 0,3
Ω = 1,1
C = 0,1
Ω = 0,3
Ω = 1,1
R_M = 0,01
C = 3
R_M = 0,01
Ω = 10
Ω = 30
C = 1
R_M = 10
Ω = 3
C = 3
R_M = 10
Ω = 30
Ω = 10

Figure 9

4.2.2. Etude de l'induction en fonction du rayon.

L'ensemble des courbes de la figure 9 illustre les variations de l'amplitude de l'induction sur l'axe en fonction du rayon. Nous remarquons ici l'importance de l'influence du nombre de Reynolds magnétique sur la pénétration de l'induction à l'intérieur du cylindre. Pour $R_M = 0,01$, le champ pénètre quasi totalement dans le système, c'est le cas des fluides faiblement électroconducteurs, pour les conductivités plus importantes ($R_M = 10$ et 100), il se produit en général un effet de peau superposé à un phénomène ondulatoire.

5 - LE RESONATEUR A MERCURE

Dans le but d'une étude expérimentale, nous allons examiner le cas particulier du résonateur à métal liquide, tout d'abord sur le plan théorique, ensuite sur le plan pratique.

5.1. Aspect théorique du problème

L'étude théorique du cas général montre l'existence et la signification physique d'un ensemble de deux pulsations particulières

$$\Omega_1 = \alpha C \qquad \text{et} \qquad \Omega_2 = \alpha . \sqrt{C^2 + 1}$$

auxquelles correspondent notamment pour l'induction respectivement une antirésonance et une pseudorésonance. Pour les métaux liquides, la célérité du son est en général beaucoup plus grande que celle des ondes magnétohydrodynamiques, par conséquent, C, et à plus forte raison C^2, est grand devant l'unité. Pour le mercure par exemple, et pour un champ d'induction uniforme de 0,1 Tesla, C^2 est de l'ordre de 4.10^6. Il apparaît donc un cas limite, les pulsations Ω_1 et Ω_2 sont pratiquement confondues, et les propriétés d'un tel résonateur sont notablement modifiées, une étude particulière s'impose donc.

En régime permanent sinusoïdal de pulsation Ω et en assimilant $\alpha.C$ à $\alpha . \sqrt{C^2+1}$, les formules (16), (17) et (18) deviennent :

$$(23)\quad P(r,t)=\sum_{\alpha}\frac{-2\alpha^{3}.c^{2}.B(1).J_{0}(\alpha r)}{(\alpha^{2}-i\Omega R_{M})(\alpha^{2}c^{2}-\Omega^{2})\,J_{1}(\alpha)}.e^{-i\Omega t}$$

$$(24)\quad u(r,t)=\sum_{\alpha}\frac{-2i\Omega\alpha^{2}.B(1).J_{1}(\alpha r)}{(\alpha^{2}-i\Omega R_{M})(\alpha^{2}c^{2}-\Omega^{2})\left(2-\frac{1}{\alpha^{2}}\right)J_{1}(\alpha)}.e^{-i\Omega t}$$

$$(25)\quad B(r,t)=\sum_{\alpha}\frac{2.\alpha.B(1).J_{0}(\alpha r)}{(\alpha^{2}-i\Omega.R_{M}).J_{1}(\alpha)}.e^{-i\Omega t}$$

L'amplitude du mouvement, ainsi que la densité de courant induite s'écrivent ici respectivement.

$$(26)\quad \xi(r,t)=\sum_{\alpha}\frac{2.\alpha^{2}.B(1).J_{1}(\alpha r)}{(\alpha^{2}-i\Omega R_{M})(\alpha^{2}c^{2}-\Omega^{2})\left(2-\frac{1}{\alpha^{2}}\right).J_{1}(\alpha)}.e^{-i\Omega t}$$

$$(27)\quad j(r,t)=\sum_{\alpha}\frac{-2.\alpha^{2}.B(1).J_{1}(\alpha r)}{(\alpha^{2}-i\Omega R_{M}).J_{1}(\alpha)}.e^{-i\Omega t}$$

Les grandeurs mécaniques $P(r,t)$, $u(r,t)$, $\xi(r,t)$ résultent de la superposition des phénomènes de diffusion et de propagation et on remarque qu'il s'établit ici une résonance pour :

$$\Omega=\alpha.c$$

où l'amplitude n'est pas limitée.

La dissipation énergétique par effet Joule n'intervient donc pas, par conséquent il se produit un découplage électromécanique du système et il n'y a pas de courant induit ayant pour origine le mouvement.

Les grandeurs électriques B(r,t), j(r,t) sont uniquement dues à des phénomènes de diffusion caractérisés par une longueur de diffusion, qui en valeur adimensionnelle s'écrit :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\Omega . R_M}}$$

Elle correspond d'ailleurs à la profondeur de pénétration d'un effet de peau.

Nous sommes donc dans ce cas, à la limite du fluide compressible et incompressible. Les grandeurs électriques sont ici les mêmes que celles qui ont été calculées dans le cas du fluide incompressible tandis que les grandeurs mécaniques font l'objet de phénomènes de propagation.

5.2. Exploitation numérique.

5.2.1. - Etude de la pression en fonction de la fréquence.

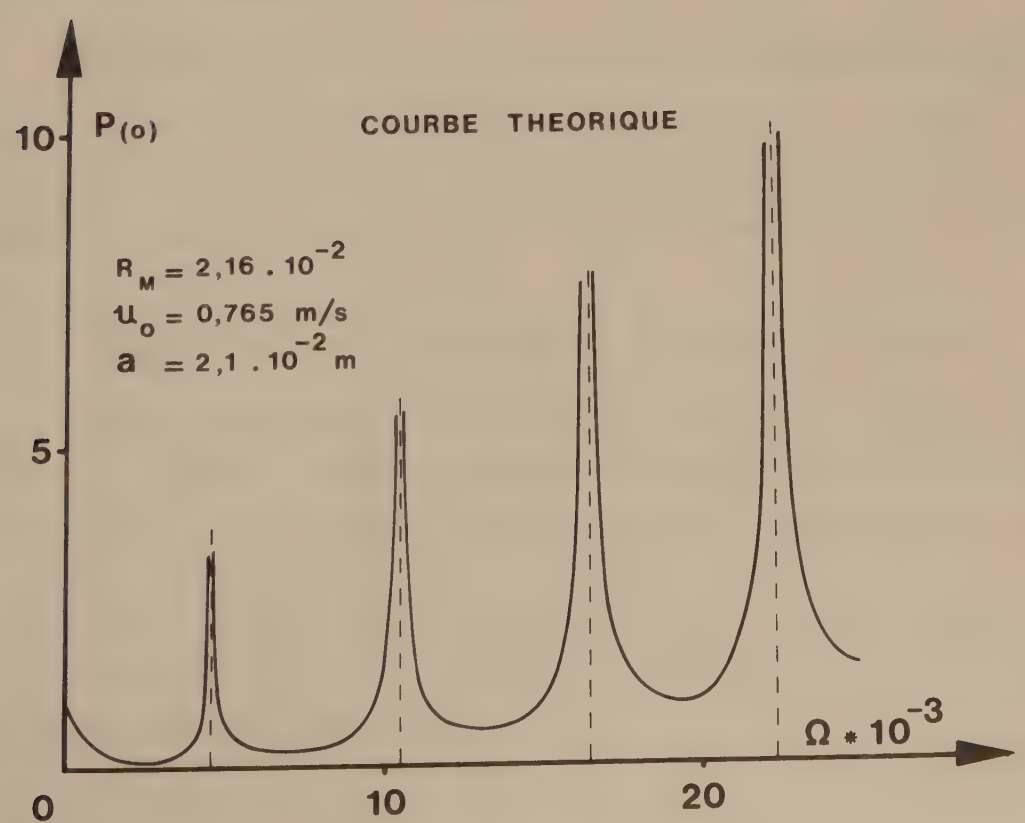


Figure 10

La figure 10 représente une application numérique de la formule (23) dans le cas du mercure, la pression étant calculée sur l'axe du cylindre.

Il apparait une succession de résonances

$$\Omega_m = \alpha_m . c$$

qui s'échelonnent suivant les zéros de la fonction de Bessel

$$J_0(\alpha) = 0$$

5.2.2. - Etude de la pression en fonction du rayon.

Une application numérique de la formule (23) est effectuée en fonction du rayon et pour des fréquences voisines des quatre premières résonances. Le phénomène est purement ondulatoire et on remarque, notamment pour les fréquences les plus élevées, le développement d'ondes stationnaires entre l'axe et la paroi du cylindre.

5.2.3. - Etude de la vitesse et de l'amplitude en fonction de la fréquence.

Les figures 12 et 13 représentent respectivement la vitesse et l'amplitude du mouvement en fonction de la fréquence, elles appellent les mêmes remarques que celles concernant la pression.

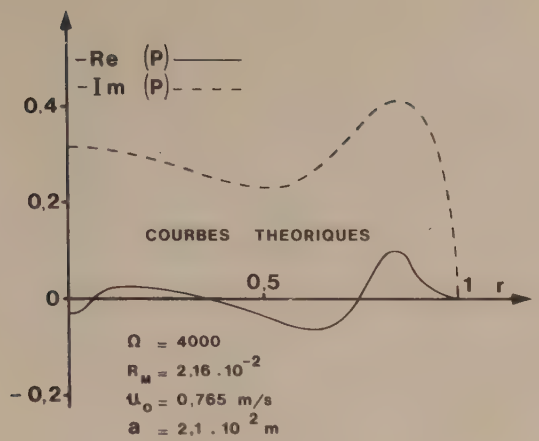
5.2.4. - Etude de la vitesse et de l'amplitude en fonction du rayon .

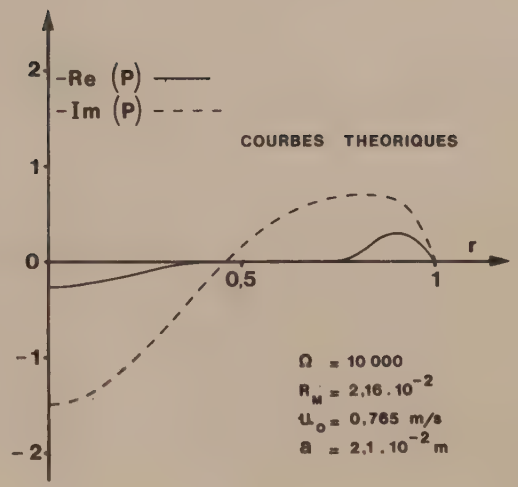
Les figures 14 et 15 représentent respectivement la vitesse et l'amplitude en fonction du rayon pour des fréquences au voisinage des quatre premières résonances . Comme pour la pression, on remarque la présence d'ondes stationnaires.

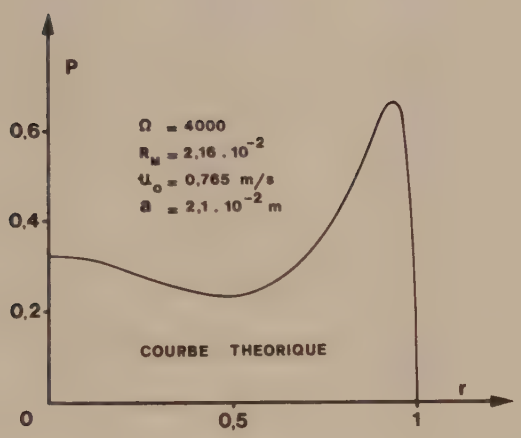
5.2.5. - Etude du champ d'induction et de la densité de courant.

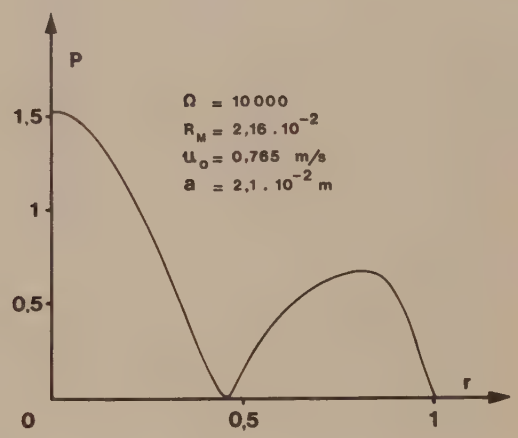
La figure 16 illustre le phénomène de diffusion de l'induction vers l'intérieur du cylindre. L'effet pelliculaire est représenté pour diverses valeurs de la fréquence correspondantes à un fonctionnement possible du résonateur.

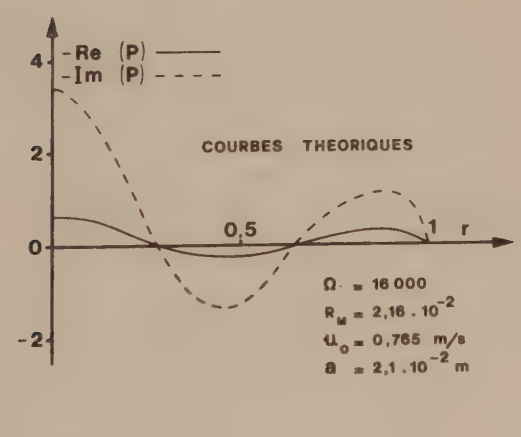
La figure 17 représente les variations de l'amplitude de la densité du courant en fonction du rayon. On peut alors faire des remarques identiques à celles qui concernent l'induction.

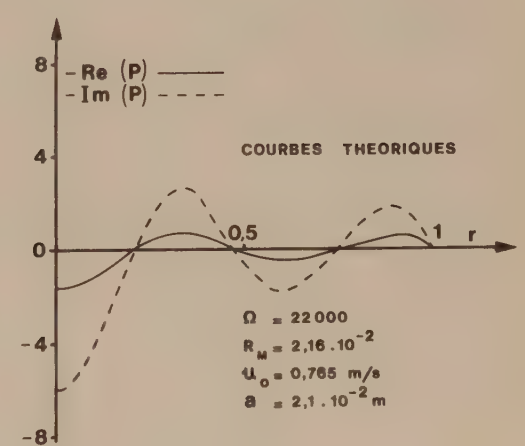

-Re (P)
-Im (P)
COURBES THEORIQUES
Ω = 4000
$R_M = 2,16 . 10^{-2}$
$u_o = 0,765$ m/s
$a = 2,1 . 10^{-2}$ m

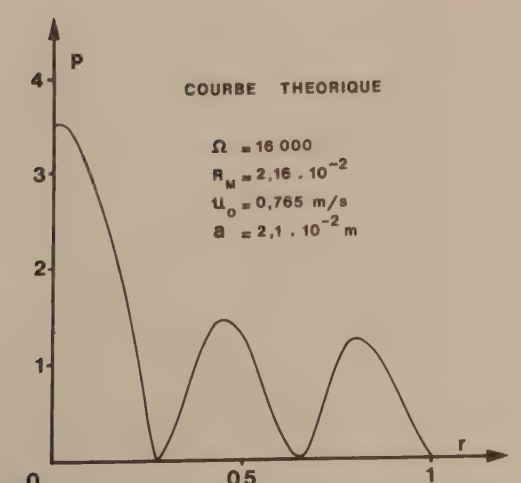

-Re (P)
-Im (P)
COURBES THEORIQUES
Ω = 10 000
$R_M = 2,16 . 10^{-2}$
$u_o = 0,765$ m/s
$a = 2,1 . 10^{-2}$ m


P
Ω = 4000
$R_M = 2,16 . 10^{-2}$
$u_o = 0,765$ m/s
$a = 2,1 . 10^{-2}$ m
COURBE THEORIQUE


P
Ω = 10 000
$R_M = 2,16 . 10^{-2}$
$u_o = 0,765$ m/s
$a = 2,1 . 10^{-2}$ m


-Re (P)
-Im (P)
COURBES THEORIQUES
Ω = 16 000
$R_M = 2,16 . 10^{-2}$
$u_o = 0,765$ m/s
$a = 2,1 . 10^{-2}$ m


-Re (P)
-Im (P)
COURBES THEORIQUES
Ω = 22 000
$R_M = 2,16 . 10^{-2}$
$u_o = 0,765$ m/s
$a = 2,1 . 10^{-2}$ m


P
COURBE THEORIQUE
Ω = 16 000
$R_M = 2,16 . 10^{-2}$
$u_o = 0,765$ m/s
$a = 2,1 . 10^{-2}$ m

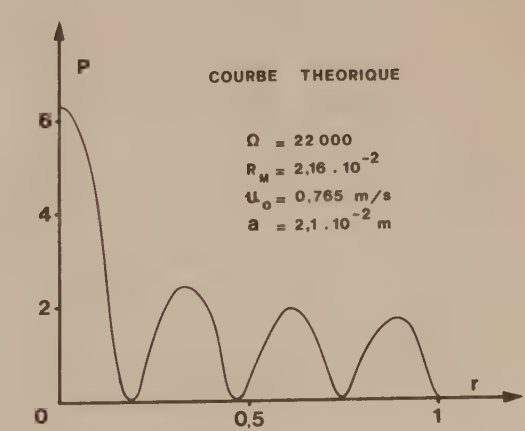

P
COURBE THEORIQUE
Ω = 22 000
$R_M = 2,16 . 10^{-2}$
$u_o = 0,765$ m/s
$a = 2,1 . 10^{-2}$ m

Figure 11

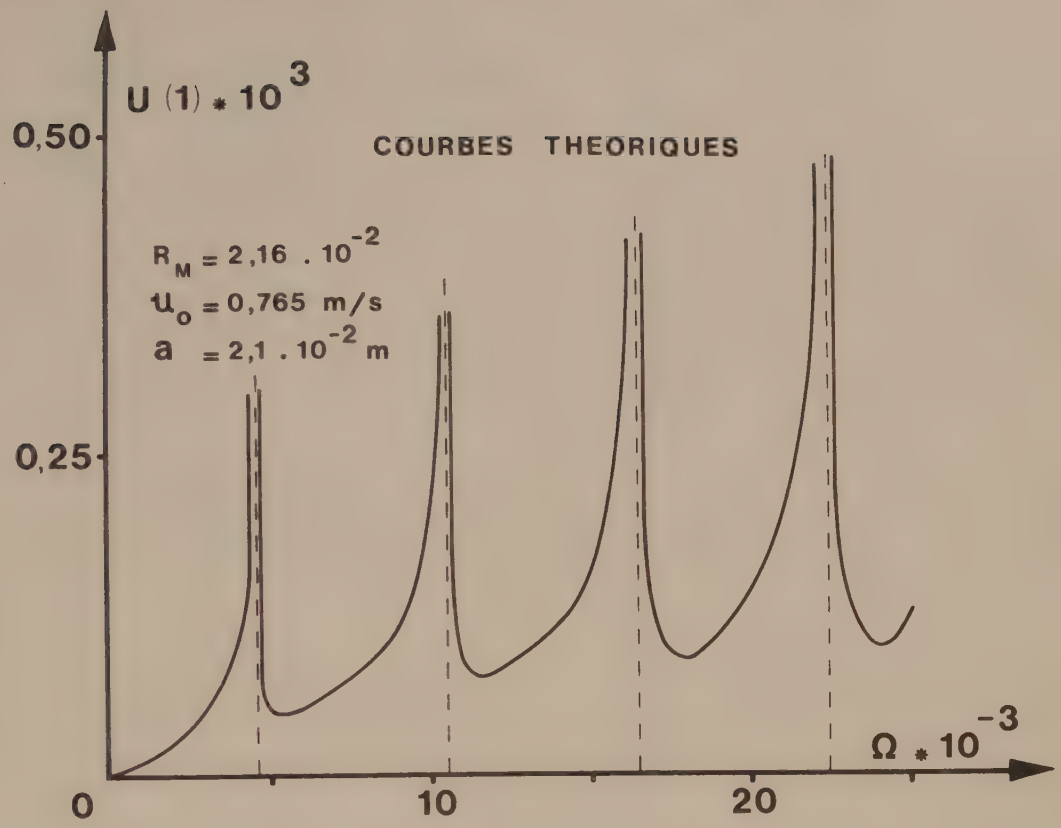


Figure 12

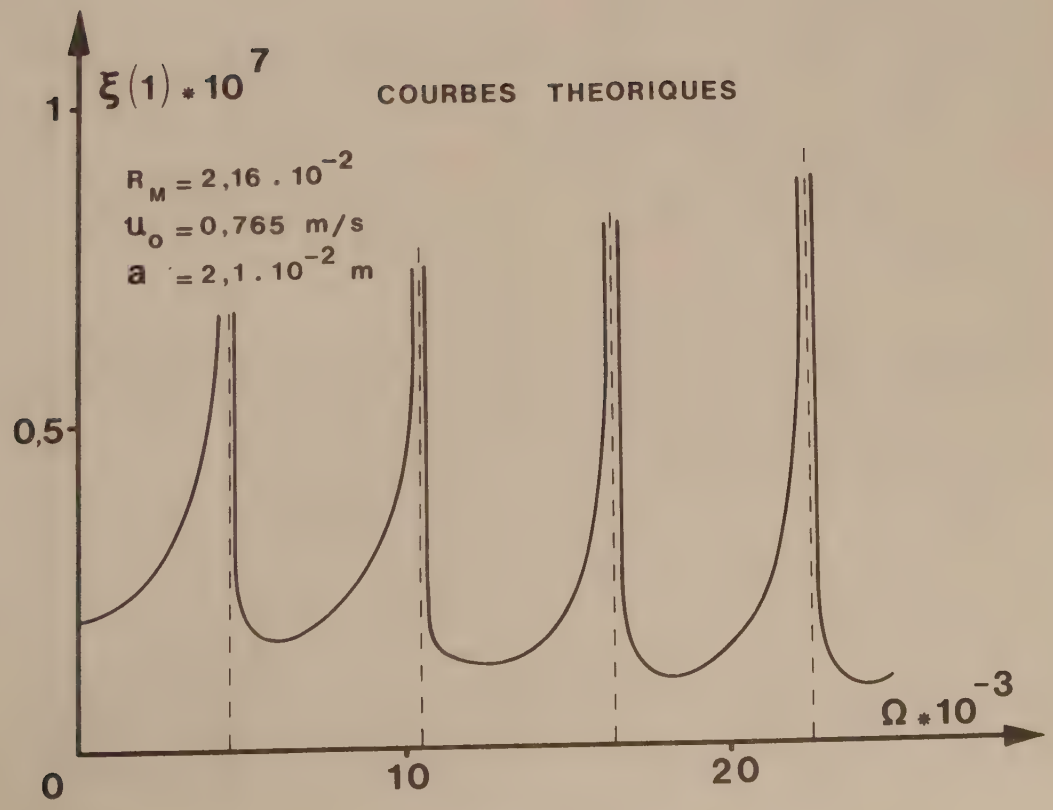
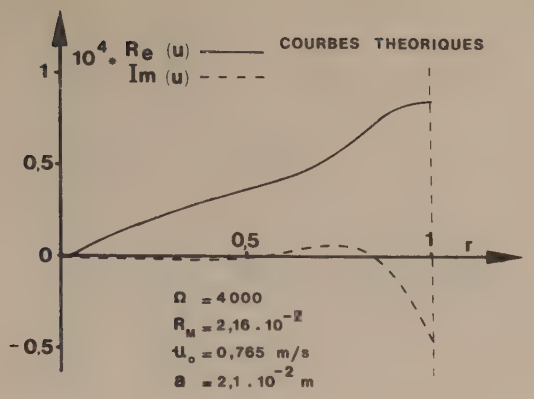
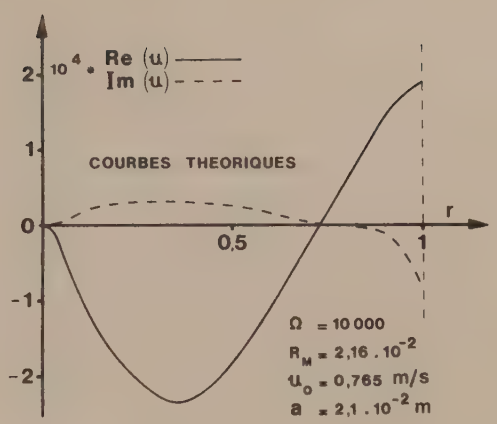
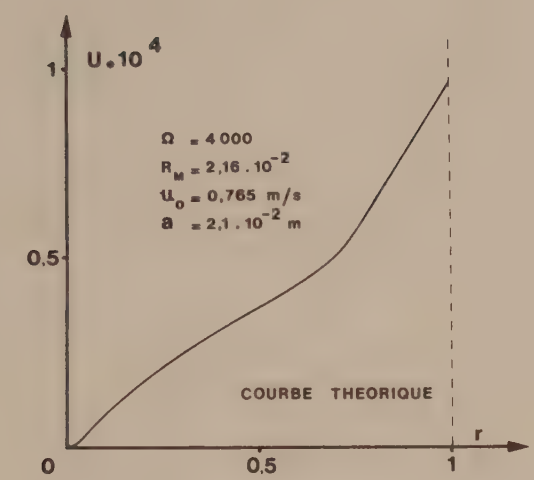
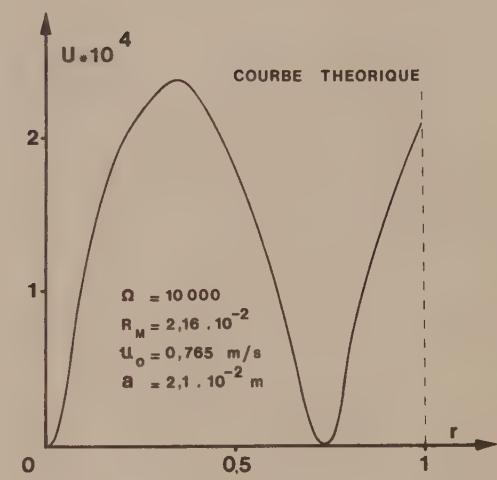


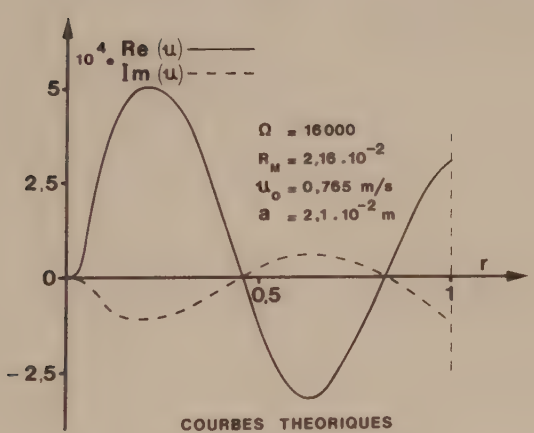
Figure 13

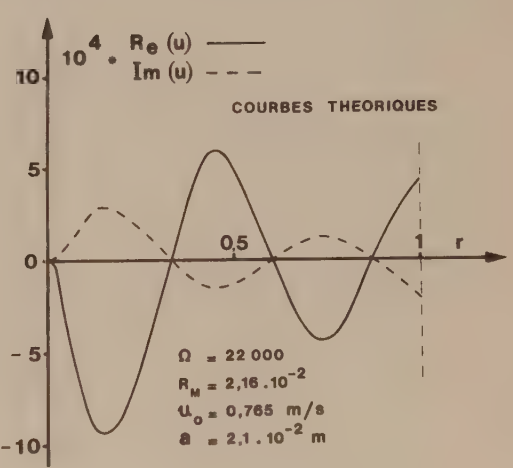

10^4 • Re (u)
Im (u)
COURBES THEORIQUES
Ω = 4000
$R_M = 2,16 . 10^{-2}$
$u_o = 0,765$ m/s
a = $2,1 . 10^{-2}$ m
r

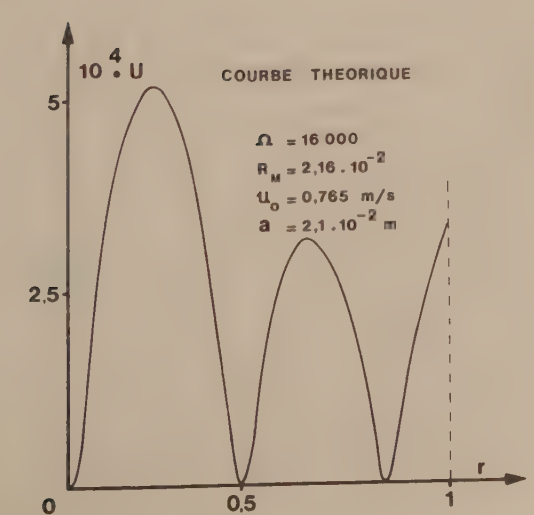

10^4 • Re (u)
Im (u)
COURBES THEORIQUES
Ω = 10000
$R_M = 2,16 . 10^{-2}$
$u_o = 0,765$ m/s
a = $2,1 . 10^{-2}$ m
r


U • 10^4
Ω = 4000
$R_M = 2,16 . 10^{-2}$
$u_o = 0,765$ m/s
a = $2,1 . 10^{-2}$ m
COURBE THEORIQUE
r


U • 10^4
COURBE THEORIQUE
Ω = 10000
$R_M = 2,16 . 10^{-2}$
$u_o = 0,765$ m/s
a = $2,1 . 10^{-2}$ m
r


10^4 • Re (u)
Im (u)
Ω = 16000
$R_M = 2,16 . 10^{-2}$
$u_o = 0,765$ m/s
a = $2,1 . 10^{-2}$ m
COURBES THEORIQUES
r


10^4 • Re (u)
Im (u)
COURBES THEORIQUES
Ω = 22000
$R_M = 2,16 . 10^{-2}$
$u_o = 0,765$ m/s
a = $2,1 . 10^{-2}$ m
r


10^4 • U
COURBE THEORIQUE
Ω = 16000
$R_M = 2,16 . 10^{-2}$
$u_o = 0,765$ m/s
a = $2,1 . 10^{-2}$ m
r

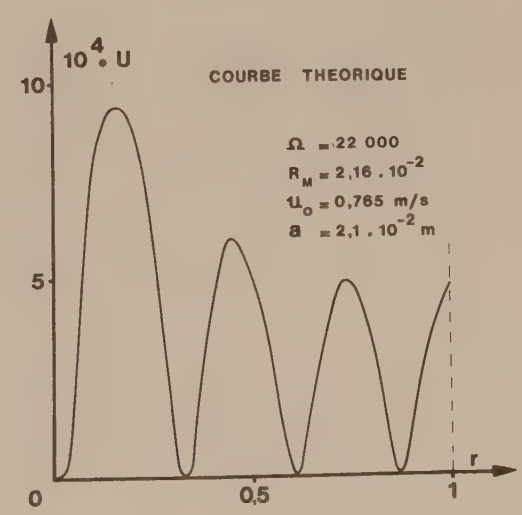
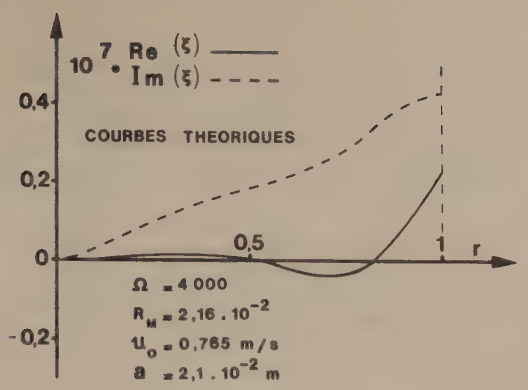
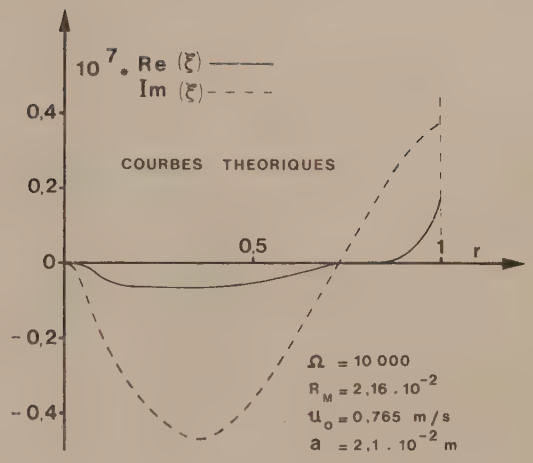
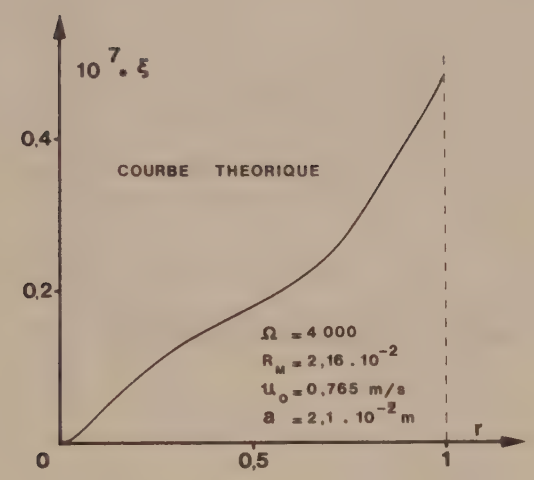
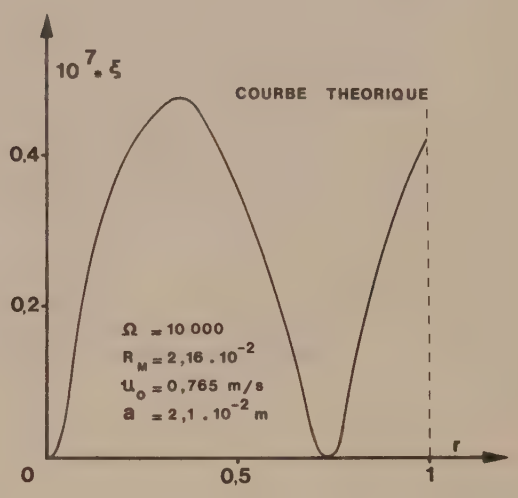

10^4 • U
COURBE THEORIQUE
Ω = 22000
$R_M = 2,16 . 10^{-2}$
$u_o = 0,765$ m/s
a = $2,1 . 10^{-2}$ m
r

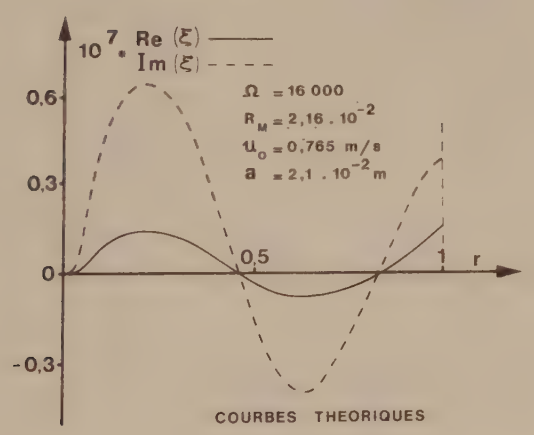
Figure 14

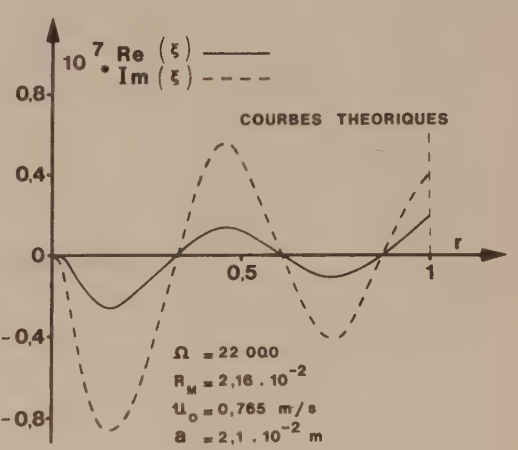

10^7 . Re (ξ) ——
Im (ξ) - - - -
COURBES THEORIQUES
0,4
0,2
0
-0,2
0,5
1
r
Ω = 4 000
$R_M = 2,16 . 10^{-2}$
$u_o = 0,765$ m/s
a = $2,1 . 10^{-2}$ m

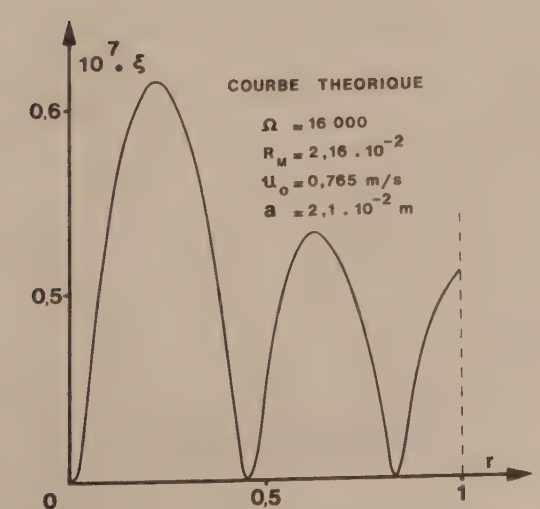

10^7 . Re (ξ) ——
Im (ξ) - - - -
COURBES THEORIQUES
0,4
0,2
0
-0,2
-0,4
0,5
1
r
Ω = 10 000
$R_M = 2,16 . 10^{-2}$
$u_o = 0,765$ m/s
a = $2,1 . 10^{-2}$ m


10^7 . ξ
COURBE THEORIQUE
0,4
0,2
0
0,5
1
r
Ω = 4 000
$R_M = 2,16 . 10^{-2}$
$u_o = 0,765$ m/s
a = $2,1 . 10^{-2}$ m


10^7 . ξ
COURBE THEORIQUE
0,4
0,2
0
0,5
1
r
Ω = 10 000
$R_M = 2,16 . 10^{-2}$
$u_o = 0,765$ m/s
a = $2,1 . 10^{-2}$ m


10^7 . Re (ξ) ——
Im (ξ) - - - -
Ω = 16 000
$R_M = 2,16 . 10^{-2}$
$u_o = 0,765$ m/s
a = $2,1 . 10^{-2}$ m
0,6
0,3
0
-0,3
0,5
1
r
COURBES THEORIQUES


10^7 . Re (ξ) ——
Im (ξ) - - - -
COURBES THEORIQUES
0,8
0,4
0
-0,4
-0,8
0,5
1
r
Ω = 22 000
$R_M = 2,16 . 10^{-2}$
$u_o = 0,765$ m/s
a = $2,1 . 10^{-2}$ m


10^7 . ξ
COURBE THEORIQUE
Ω = 16 000
$R_M = 2,16 . 10^{-2}$
$u_o = 0,765$ m/s
a = $2,1 . 10^{-2}$ m
0,6
0,5
0
0,5
1
r

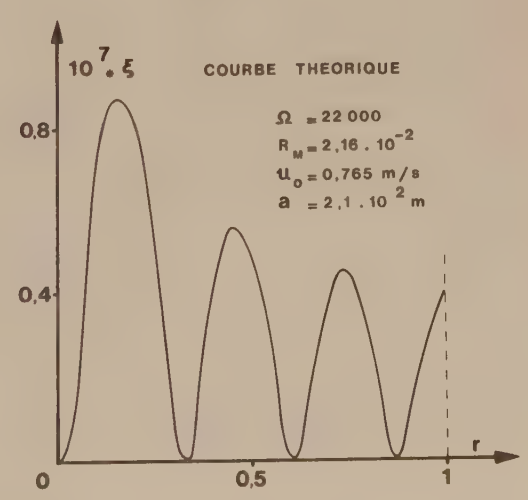

10^7 . ξ
COURBE THEORIQUE
Ω = 22 000
$R_M = 2,16 . 10^{-2}$
$u_o = 0,765$ m/s
a = $2,1 . 10^{-2}$ m
0,8
0,4
0
0,5
1
r

Figure 15

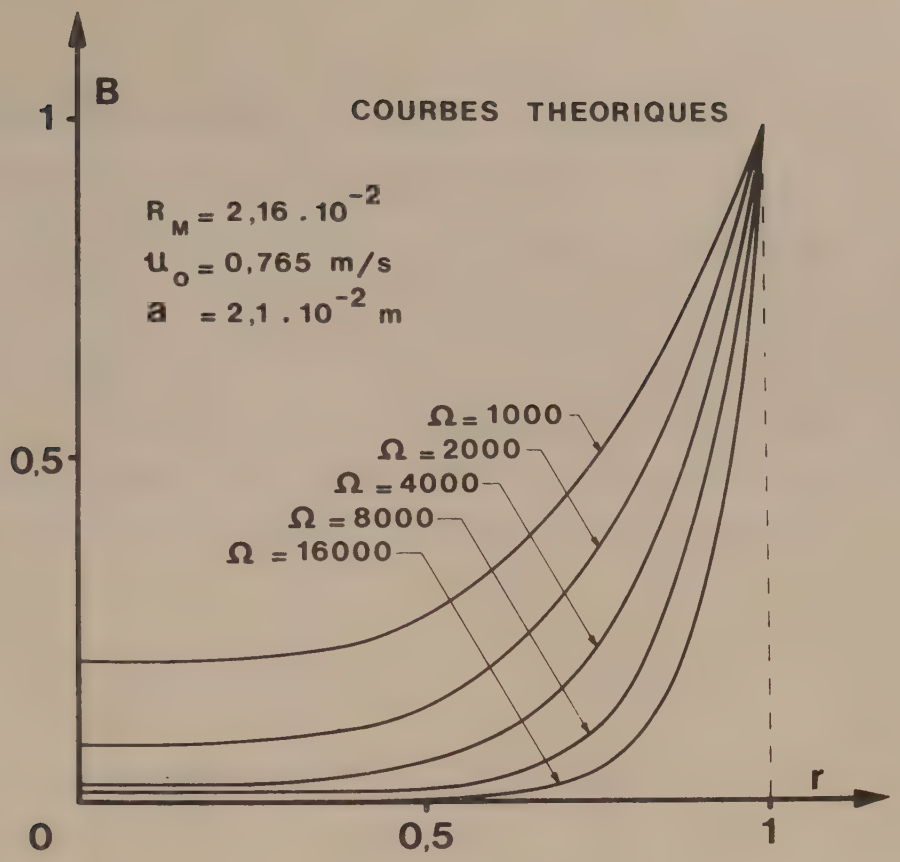


Figure 16

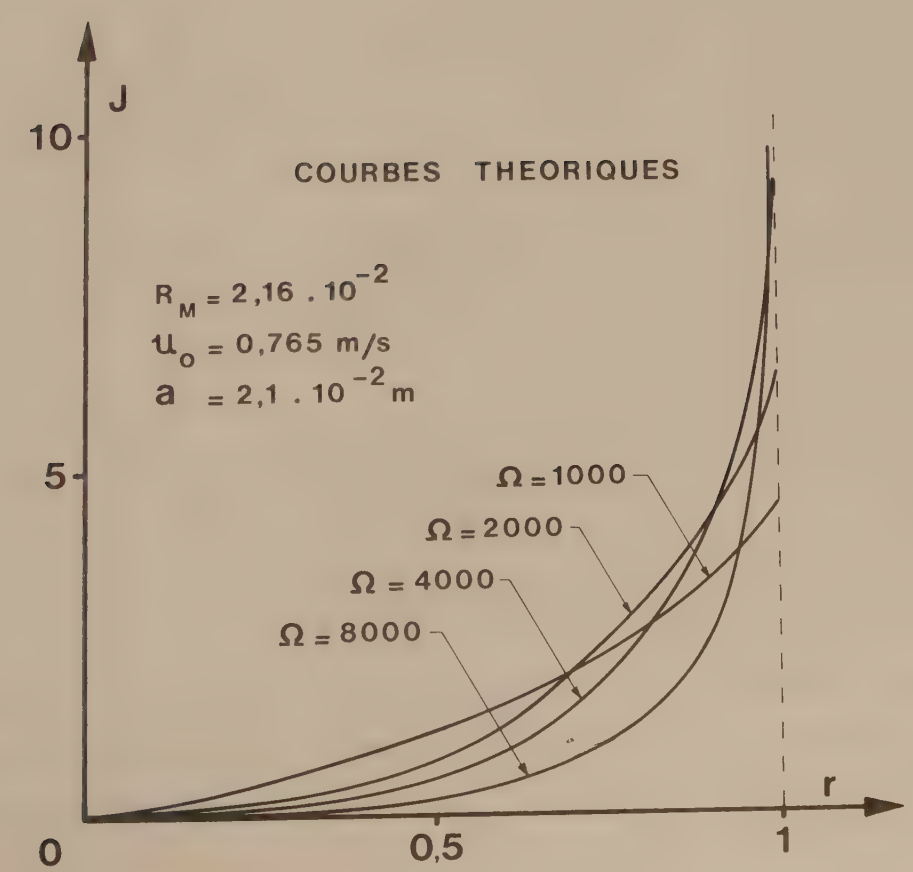


Figure 17

5.3. Etude expérimentale

5.3.1. Description des dispositifs expérimentaux

Le mercure est contenu dans un cylindre de plexiglass de rayon 21 mm et d'épaisseur 0,2 mm. Un capteur de pression piézoélectrique au titanate de Baryum est disposé sur une des parois planes suivant l'axe de symétrie du cylindre. Le récipient est placé, soit dans un solénoïde, soit entre des bobines d'Helmoltz, alimentés en courant alternatif, l'ensemble est alors immergé dans un champ d'induction magnétique uniforme et coaxial.

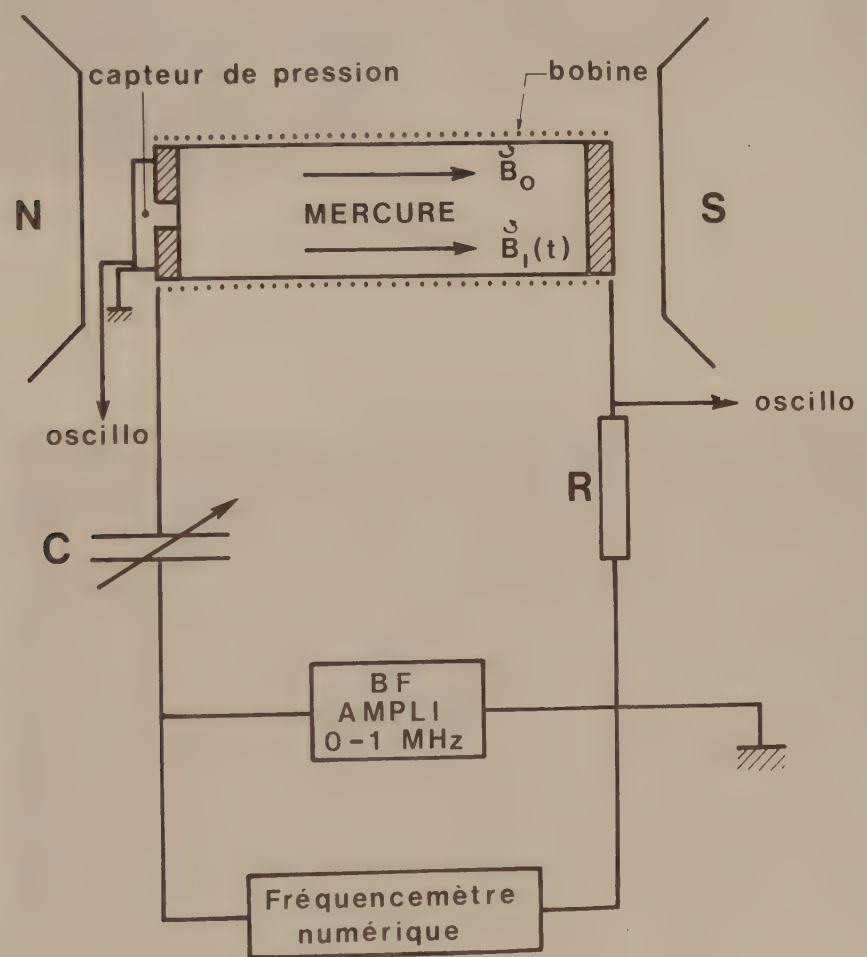


Figure 18

Les figures 18 et 19 représentent respectivement le schéma de principe et une photographie du montage en place, tandis que la figure 20 donne une vue de détail du résonateur cylindrique.

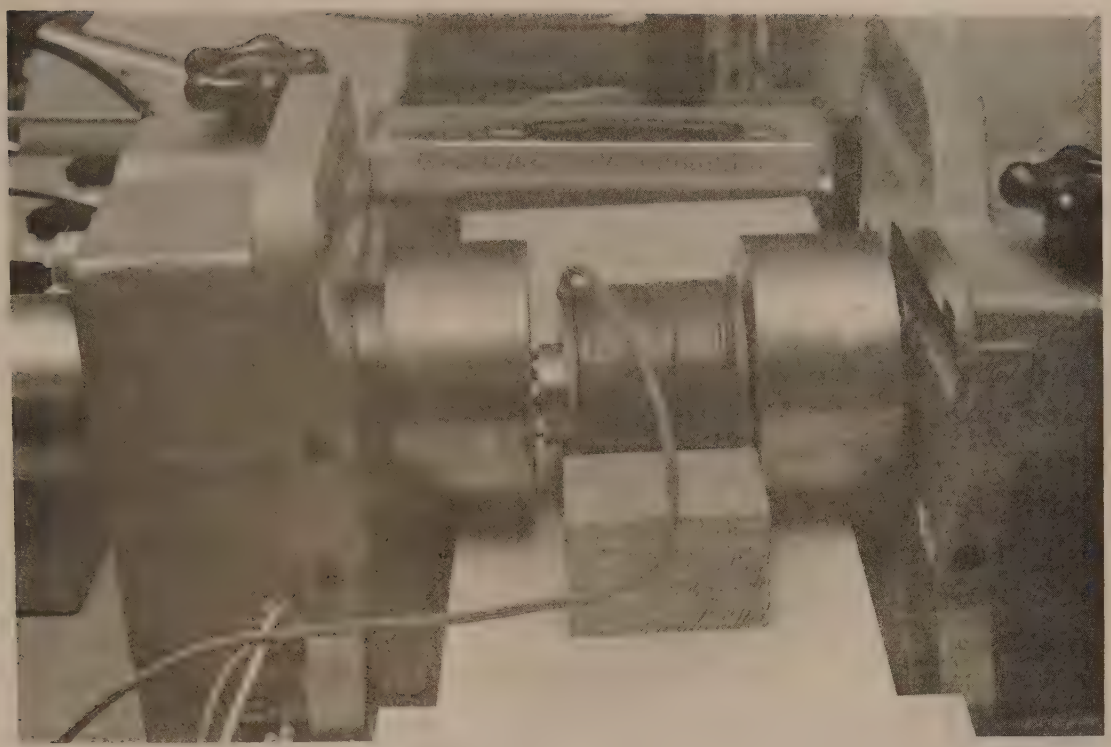


Figure 19

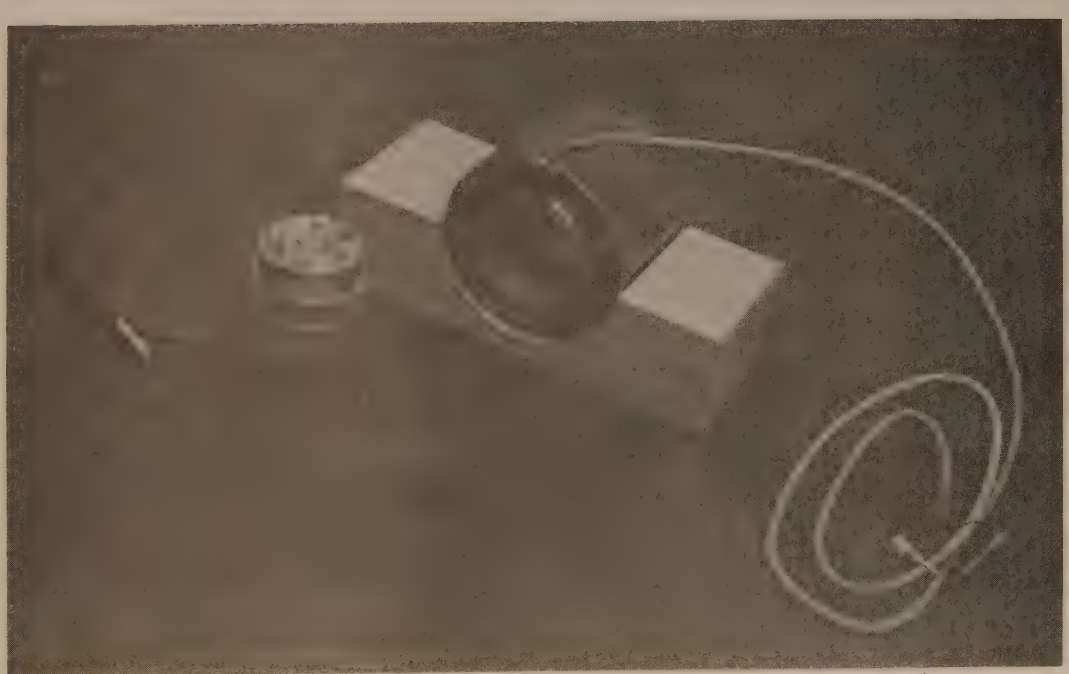


Figure 20

L'induction uniforme appliquée est fournie par un électroaimant, elle est ici de 0,1 Tesla. La composante alternative provient d'un solénoïde de 1000 spires alimenté par l'intermédiaire d'un générateur à modulation de fréquence et d'un amplificateur de puissance de 10 Watt. Le courant d'excitation est de l'ordre de 1 mA et l'amplitude de l'induction correspondante de 10^{-4} Tesla. On note que les grandeurs électromécaniques obtenues sont proportionnelles au produit des deux inductions. Le rapport B_1/B_o est ici de 10^{-3} conformément aux hypothèses faites.

Les pressions sont mesurées sur l'axe à l'aide du capteur de pression piézoélectrique relié à un oscilloscope, la réponse est de 1 mV pour 12 mm de mercure.

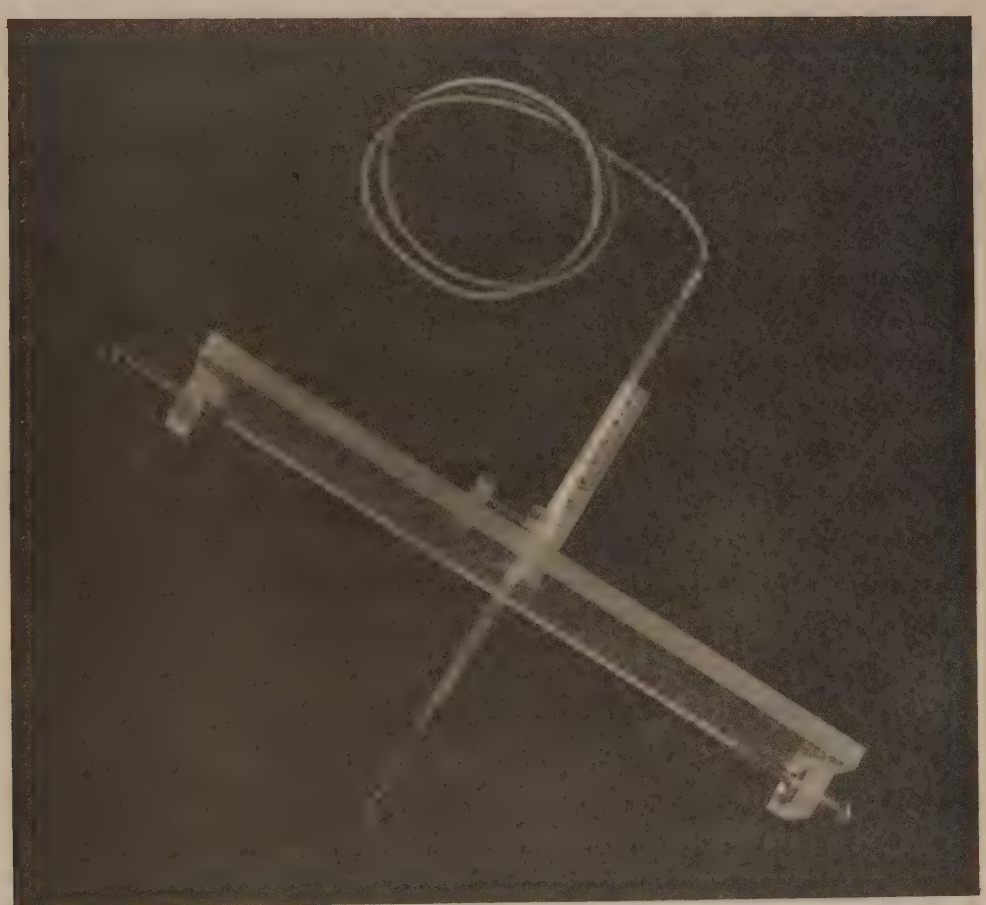


Figure 21

L'induction instationnaire est détectée par une microbobine (figure 21) de diamètre 1 mm et comportant 90 spires. La sonde est introduite par un orifice de la paroi latérale et fournit une réponse proportionnelle à l'amplitude

de l'induction.

On dispose aussi d'un fréquencemètre numérique de grande précision (10^{-7}) pour effectuer la mesure des fréquences de résonance.

5.3.2. - Comparaison de la théorie et de l'expérience.

5.3.2.1. - Les fréquences de résonance.

Fréquences (Hz)			
Théorie	Expérience	Ordre	Ecart %
26427	30380	0	14
60662	62000	1	2,2
95098	95681	2	0,61
129580	129594	3	0,01
164080	163660	4	0,26
198588	197757	5	0,44
233101	233567	6	0,20
267616	267161	7	0,17
302133	302855	8	0,24
336651	336684	9	0,01
371169	369345	10	0,50
405691	403558	11	0,50
440221	437843	12	0,60

TABLEAU I

Le tableau I confronte l'expérience à la théorie, les fréquences de résonance sont calculées par la relation :

$$\Omega_n = \alpha_n . C$$

Elles sont ensuite mesurées au fréquencemètre en recherchant les résonances de la pression sur l'axe.

On remarque que la concordance est en moyenne de 0,5 % sauf pour les fréquences d'ordre 0 et 1 qui présentent respectivement des écarts de 14 % et 2,2 %. La limitation de la longueur du cylindre et la présence d'un léger mouvement axial peuvent expliquer les différences signalées ci-dessus. Cette anomalie tend rapidement à disparaître lorsque la fréquence augmente. Les résonances sont détectables jusqu'à l'ordre 12, mais à partir de l'ordre 6, elles deviennent moins nettes. Ceci montre toutefois une bonne sélectivité en fréquence du résonateur.

5.3.2.2. - La pression sur l'axe.

La pression est la seule grandeur mécanique accessible à l'expérience de manière simple. On effectue d'abord une mesure, en fonction de la fréquence, allant du fondamental jusqu'à l'ordre 3 inclus (figure 22)

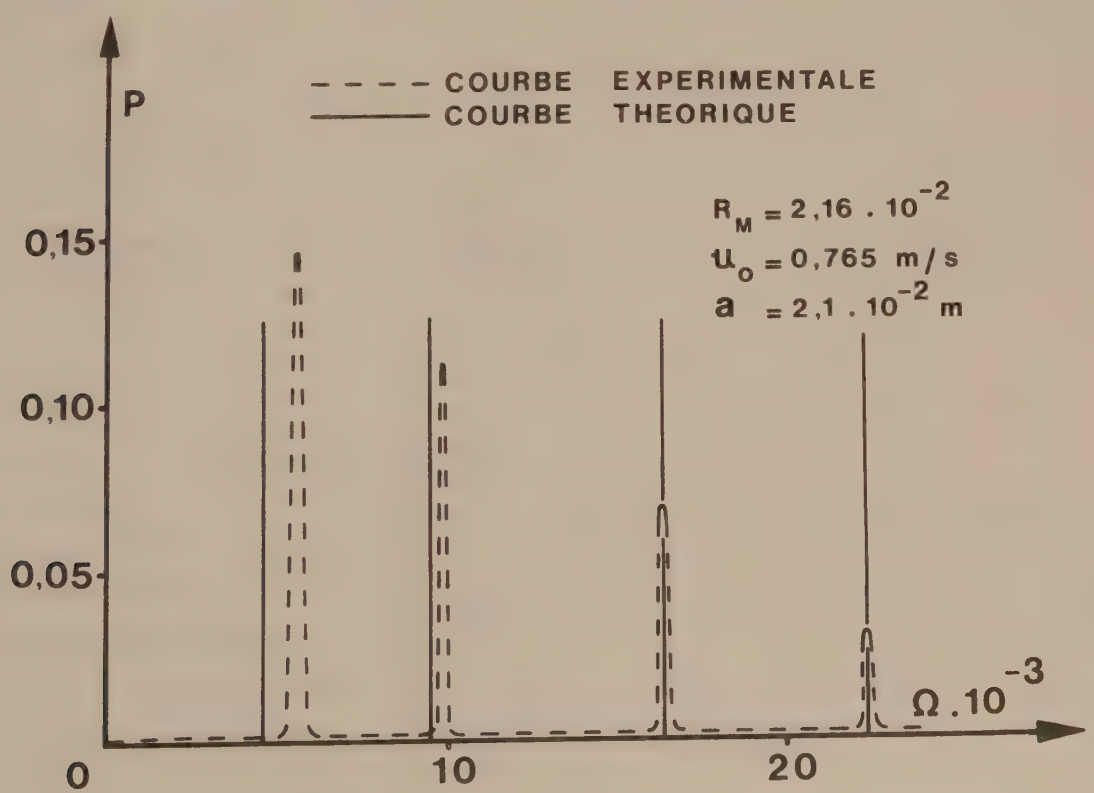


Figure 22.

Il faut noter qu'avec l'échelle employée, la courbe théorique se réduit à l'axe Ω et aux asymptotes. On remarque l'écart de 14 % précédemment signalé au niveau du fondamental, mais la concordance atteint 10^{-4} pour l'ordre 3. Une mesure détaillée est faite au voisinage de cette résonance, la mesure confirme la théorie d'une manière convenable (figure 23).

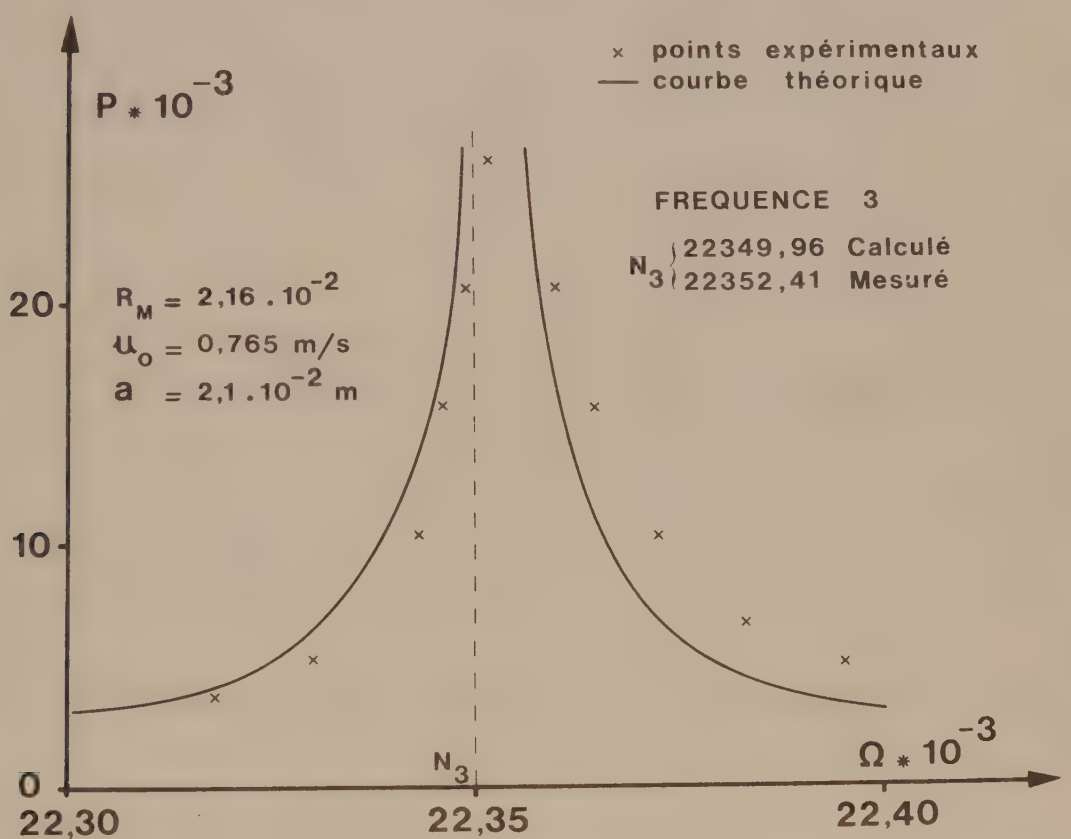


Figure 23.

5.3.2.3. - Mesures d'induction

La figure 24 représente la variation expérimentale et théorique de l'induction en fonction du rayon pour une gamme de fréquences correspondantes aux utilisations possibles du résonateur. La concordance est bonne mais il apparaît une légère distorsion due à la nature des bobines utilisées. La mise en évidence expérimentale de l'effet de peau est alors très nette.

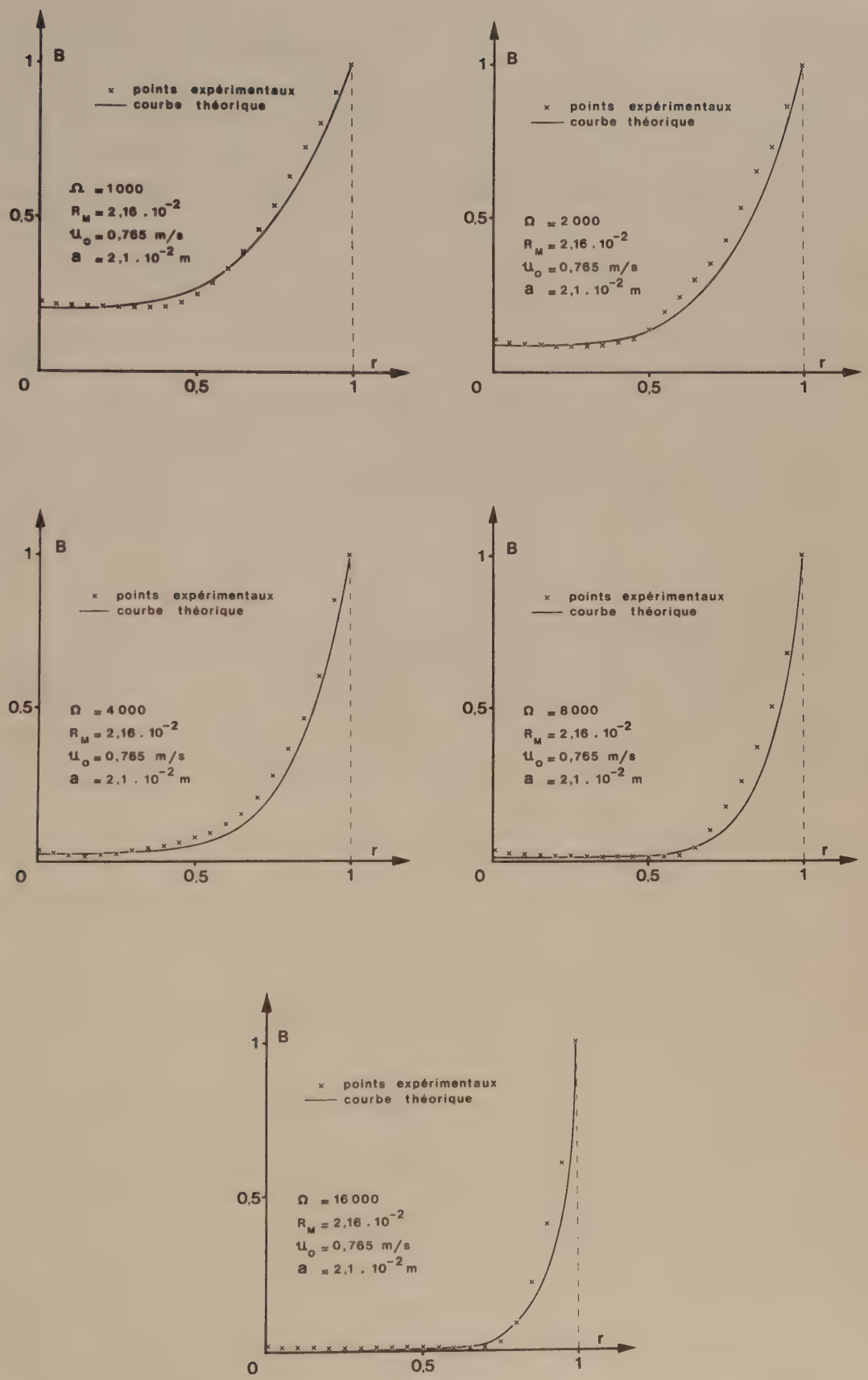

B
r
points expérimentaux
courbe théorique
Ω = 1000
$R_M = 2,16 . 10^{-2}$
$u_o = 0,765$ m/s
$a = 2,1 . 10^{-2}$ m
Ω = 2 000
Ω = 4 000
Ω = 8 000
Ω = 16 000
0
0,5
1

Figure 24

5.3.2.4. - Mesures de déphasage.

En régime permanent sinusoïdal, la comparaison des signaux électriques correspondant respectivement à la pression et à l'induction permettent une mesure de déphasage (figure 25) au voisinage de la résonance d'ordre 3. Il apparaît alors une discontinuité de π.

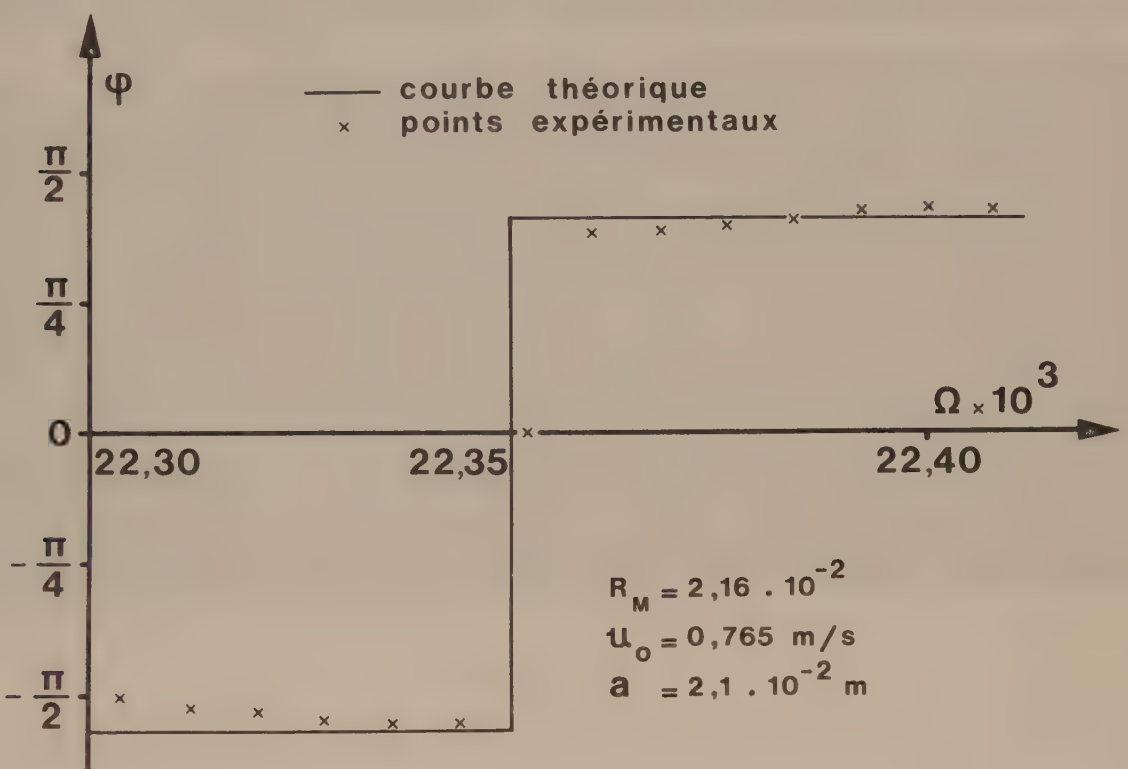


Figure 25.

5.3.3. - Autres résultats expérimentaux.

5.3.3.1. - La pression en fréquence modulée.

La figure 26 montre, en modulation de fréquence, la réponse du capteur de pression entre 25 KHz et 100 KHz et met en évidence les fréquences fondamentales, d'ordre 1 et 2.

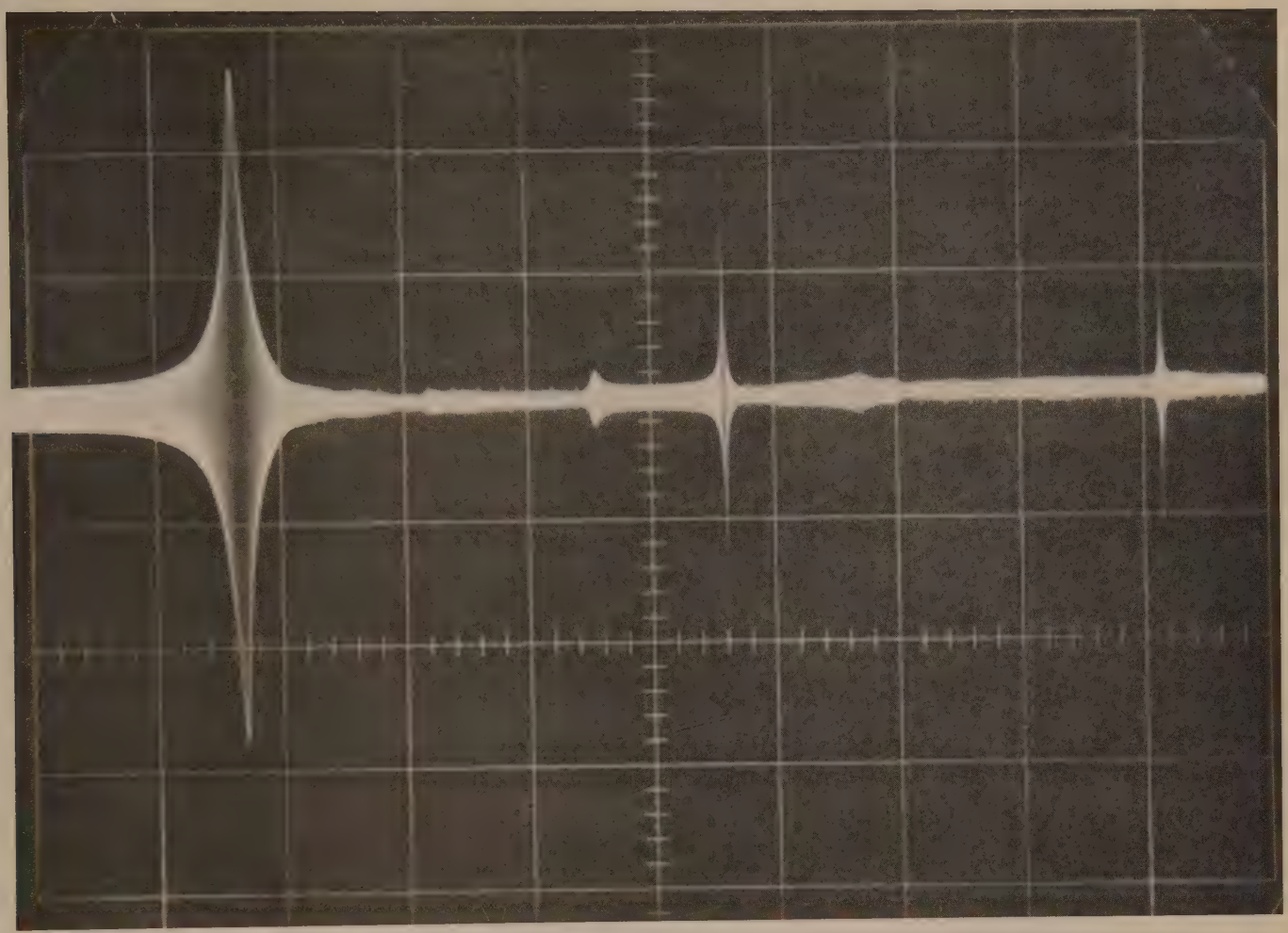


Figure 26.

Les figures 27, 28 et 29 représentent le détail de chaque résonance avec les balayages respectifs suivants :

30,380 KHz ± 10 %
62,000 KHz ± 2,5 %
95,681 KHz ± 1 %

L'amplitude des pressions ainsi obtenues est de l'ordre de 1 000 Pascals.

5.3.3.1. - Bande passante à 3 dB

La pression en fréquence modulée caractérise une grande sélectivité des résonances. A titre d'exemple, on recherche donc à cet effet la bande passante à 3 décibels pour le fondamental et l'ordre 3.

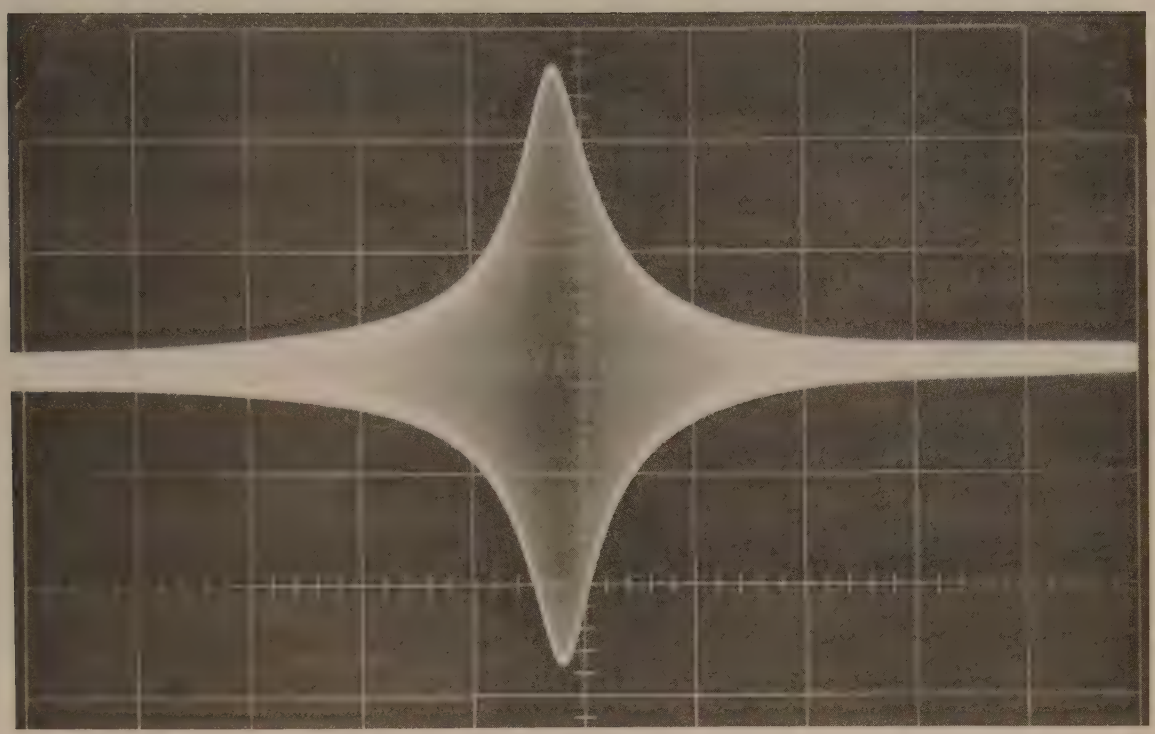


Figure 27

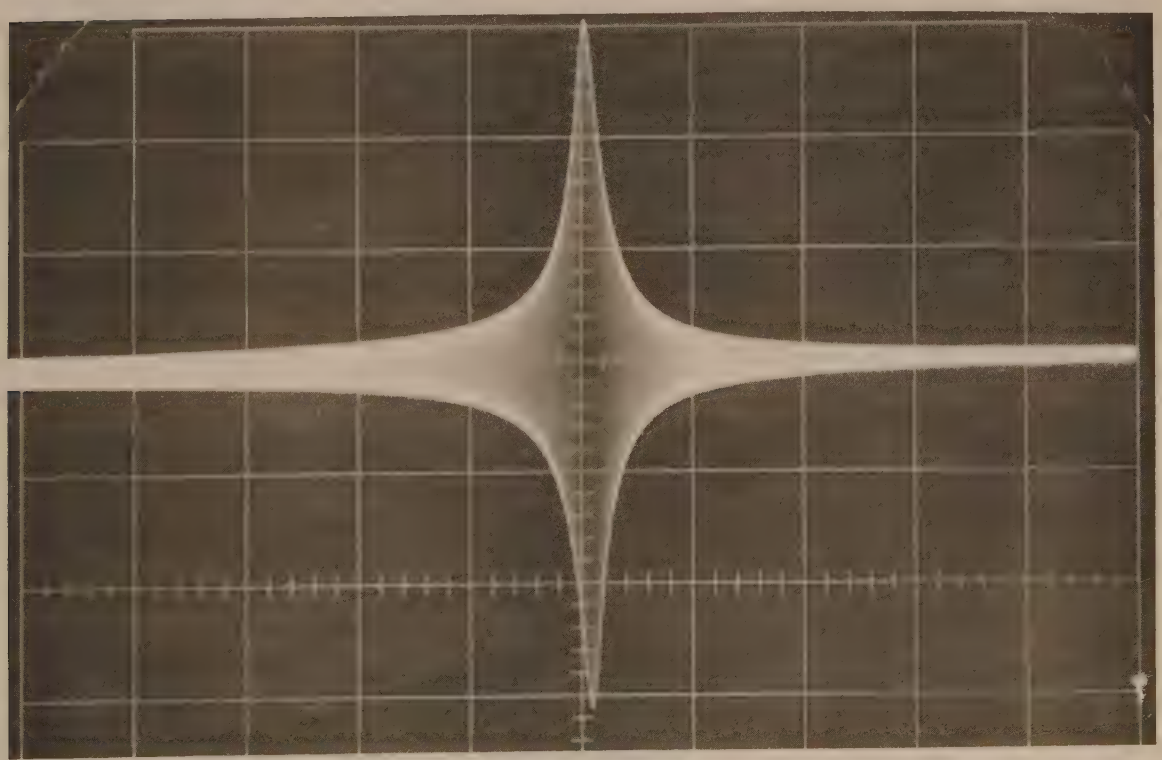


Figure 28

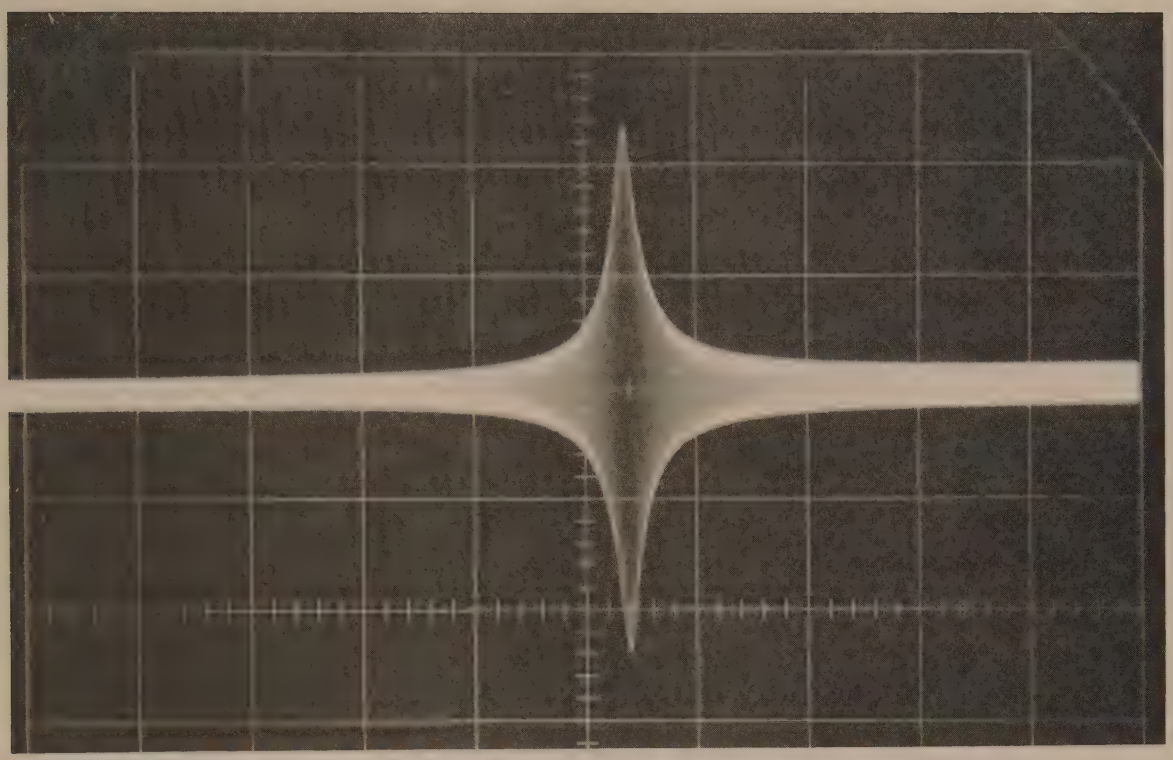


Figure 29.

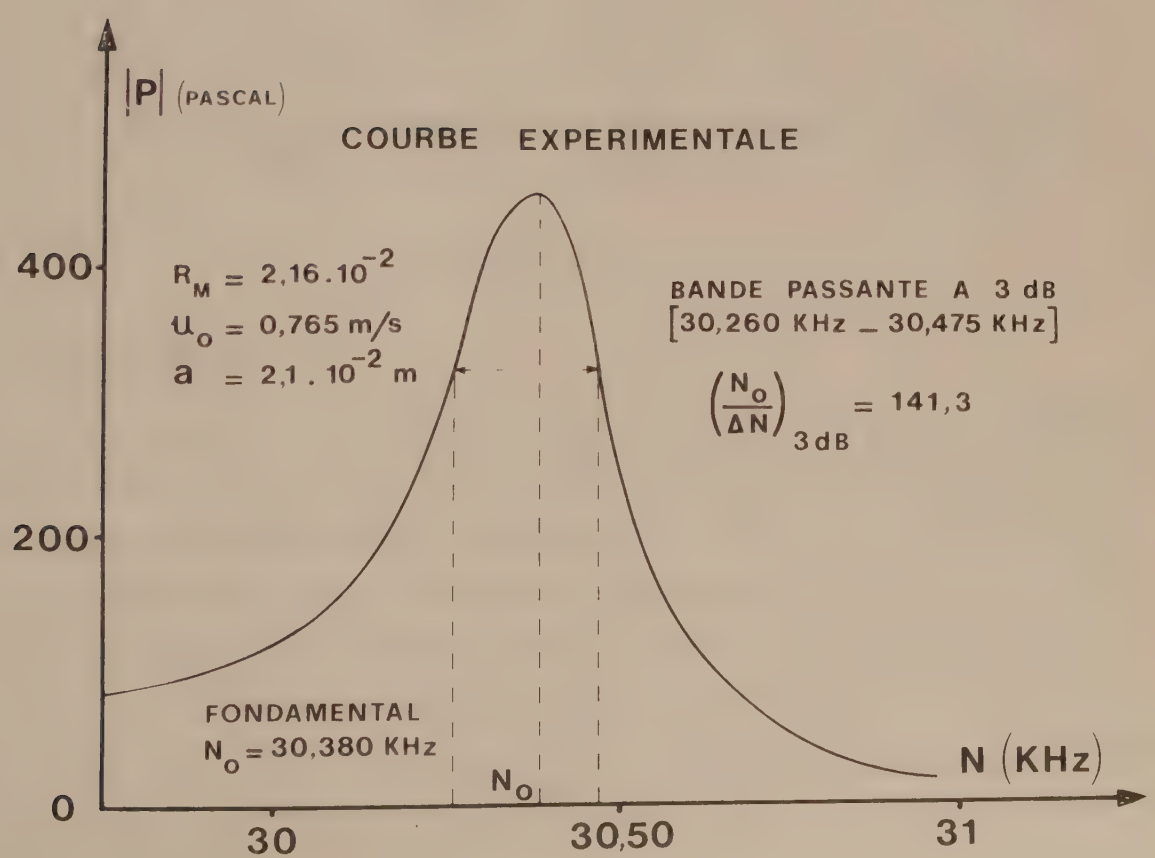


Figure 30

Les rapports $\left(N_o/\Delta N\right)_{3\,dB}$ sont ici respectivement de 141,3 et 1619,9 et montrent la grande sélectivité en fréquence de ce résonateur, les bandes passantes étant très étroites.

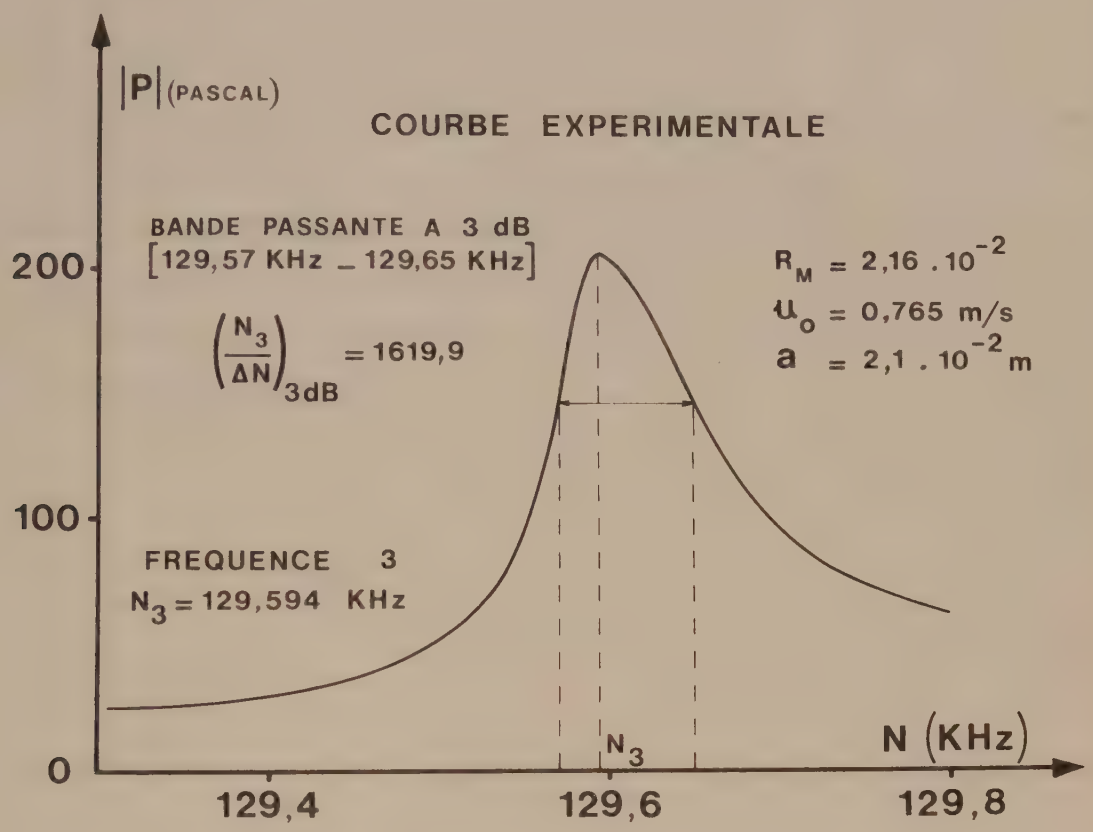


Figure 31.

6. CONCLUSION.

L'application à un milieu conducteur compressible d'un champ d'induction, comportant une composante continue et une composante fluctuante, y développe des forces électromagnétiques possédant des propriétés singulières. Le couplage électromécanique ainsi réalisé met en évidence des fréquences particulières, de résonance et d'antirésonance, pour lesquelles, malgré le mouvement du fluide, le champ de force électromagnétique est nul. Malgré une théorie faite initialement pour un milieu visqueux, la réalité physique nous a permis de négliger la viscosité par la suite, l'interprétation physique du couplage électromécanique

apparait alors beaucoup plus clairement. Le cas limite constitué par les métaux liquides est particulièrement intéressant car la limitation des grandeurs mécaniques est alors inexistante, seuls les effets visqueux subsistent théoriquement, en fait, c'est le rayonnement acoustique et la contrainte des parois qui constituent les causes essentielles de la dissipation énergétique.

L'étude expérimentale illustre convenablement la théorie, de plus, la mise en évidence de résonances très sélectives permet éventuellement d'utiliser ce système comme générateur de vibrations dans un milieu magnétohydrodynamique. Nous avons étudié ici un résonateur de forme cylindrique, mais, à priori, une telle réalisation peut s'étendre à des montages de formes différentes, parallélépipédiques par exemple.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] H.K. MOFFAT — On the suppression of Turbulence by a Uniform Magnetic Field. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 28, Part. 3, pp 571-592.

[2] R. MOREAU — Contribution à l'étude des écoulements hydromagnétiques. Thèse de Doctorat de Sciences Physiques. GRENOBLE 1962.

[3] P. LECOCQ — Contribution à l'étude des pertes de charge et profils de vitesse à écoulement turbulent magnétohydrodynamique. Thèse de Doctorat de Sciences physiques. GRENOBLE 1964.

[4] S. CHANDRASEKHAR — Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford, At the Clarendon Press.

[5] H. ALFVEN and CARL-GUNNE FALTHAMMAR — Cosmical Electrodynamics. Oxford, At the Clarendon Press.

[6] E. DURAND — Electrostatique et Magnétostatique. Masson et Cie, Editeurs.

[7] T.G. COWLING — Magnétohydrodynamique. Dunod - Paris - 1960.

[8] J.N. DUNGEY — Electrodynamique Cosmique. Dunod - Paris - 1962.

[9] W.F. HUGHES
F.J. YOUNG
The Electromagnétohydrodynamics of Fluid.
John Wiley - 1966.

[10] D. BERSHADER
The Magnetodynamics of Conducting Fluids. Stanford University Press.

[11] H. LACAZE
Tour d'horizon sur la magnétohydrodynamique.
n° B.S.T. 128.

[12] L.D. LANDAU and E.N. LIFSHITZ
Fluid Mechanics.
Pergamon Press.

[13] William C. ELMORE
Mark A. HEALD
The Physics of Waves.

[14] Theodor F. HUETER
Richard H. BOLT
Sonics.

[15] R. COMOLET
Mécanique Expérimentale des fluides. Masson et Cie, Editeur.

[16] R. COURANT and
D. HILBERT
Methods of Mathematical Physics.
Interscience Publishers.

[17] John H. MURPHY
Magnetoacoustic Waves in Waveguides. Ph. Thesis.

[18] C.M. TCHEN
Spectrum of Stationary Homogeneous Magnetohydrodynamic Turbulence. The Physics of Fluids, Volume 8, Number 8 - Septembre 1965

[19] Lawrence L. LEE

A formulation of the Theory of Isotropic Hydromagnetic Turbulence in an Incompressible Fluid.
Annals of Physics : 32, 292-321 (1965).

[20] S. LUNQUIST

Experimental Investigations of Magneto-hydrodynamic Waves.
Physical Review
December, 15, 1949
Volume 76, Number 12, 1805.

[21] CHUEN-YEN-CHOW and MAHINDER S. UBEROS

Hydromagnetic Stability of Fluid between Two Coaxial Cylinders.
The Physics of Fluids, Volume 9, Number 3, 413 - March 1965.

[22] Bo. LEHNERT

Magneto-Hydrodynamic Waves in Liquid Sodium.
Physical Review, Vol. 94, N°4, May 15, 1954.

[23] F.L. CURZON and R.L. PIKE

An Investigation of Hydrodynamic Waves with a cylindrical microwave resonator. The influence of an axial magnetic field.
Candian Journal of Physics, Volume 47, May 15, 1969, Number 10.

[24] G.S. BAJWA and K.M. SRIVASTAVA

Hydromagnetic waves in a finitely conducting fluid mass immersed in a nonuniform magnetic field.
Candian Journal of Physics
47, 1011 (1969).

[25] E.L. RESLER, Jr — Some Remarks of Hydromagnetic Waves for Finite Conductivity Reviews of Modern Physics, Volume 32, Number 4, October 1960.

[26] A. SNEYD — Generation of Fluid Motion in a Circular cylinder by an unsteady applied magnetic field. Journal of Fluid Mechanics, Volume 49, part 4, pp. 817, 827.

[27] NGUYEN-DUC-XUONG — Etude théorique et expérimentale des instabilités de Rayleigh-Taylor en magnétohydrodynamique. Thèse de Docteur-Ingénieur, Paris.

[28] I.N. SNEDDON — Fourier Transforms Mc Graw-Hill Book Company, INC.

D E U X I E M E T H E S E

PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

Vu et permis d'imprimer
Marseille, le 29 novembre 1974
Le Président de l'Université

F. BOREL